الفصل الرابع: المثاليات والعمليات عليها:

1 حلقة الباقي أو القسمة:

لتكن $\mathbb{R}$ حلقة و I مثالي في $\mathbb{R}$ نعرف العلاقة $\sim$ على $\mathbb{R}$ بالشكل:

$$x, y \in \mathbb{R} \,;\, x \sim y \leftrightarrow x - y \in I$$

عندئذٍ تكون العلاقة علاقة تكافؤ ((انعكاسية، تناظرية، متعدية))

عندئذٍ نعرف صف التكافؤ المعرف لعنصر مثل x بالشكل:

$$[x] = \{y \in \mathbb{R} : x \sim y\}$$ مجموعة العناصر التي تكافئ x

$$= \{y \in \mathbb{R} : x - y \in I\}$$

$$= \{y \in \mathbb{R} : x - y = i \,;\, i \in I\}$$

$$= \{x + j \;:\; y = x + j \quad j \in I\}$$

$$= \{x + j \in \mathbb{R} : x + j \in I\} = x + I$$

وهي تعني جميع العناصر التي تكون من الشكل $x + j \in I$

نرمز لها بـ $X + I = \bar{x}$

_ نرمز لمجموعة كل صفوف التكافؤ بالرمز R/I

نعرف على هذه المجموعة قانوني تشكيل داخليين

أ- القانون الأول (الجمع):

$$\bar{x} = x + I \;,\; \bar{y} = y + I \in \mathbb{R}/I$$

$$\bar{x} + \bar{y} = (x + I) + (y + I) = (x + y) + I$$

الجمع المعرف على $\mathbb{R}$

ب- القانون الثاني (الضرب):

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = (x + I) \cdot (y + I) = x \cdot y + I$$

المعرف على $\mathbb{R}$

_ عندئذٍ يكون النظام الرياضي $(\mathbb{R}/I, +, \cdot)$ حلقة

صفر الحلقة $0 + I = I$

ملاحظات:

١. $\mathbb{R}$ تبديلية فإن $\mathbb{R}/I$ تبديلية

٢. $\mathbb{R}$ واحدية فإن $\mathbb{R}/I$ واحدية محايدها هو $1+I$

٣. إذا كان $x\in I$ فإن $x+I=I$ (لأن x يكافئ 0)

البرهان (لرقم 3)

إن $x\in I \leftrightarrow x+I=I \leftrightarrow x-0\in I \leftrightarrow x\sim 0$

$\leftrightarrow \quad x+I=I=0+I \leftrightarrow x\in I$

تسمى الحلقة $(\mathbb{R}/I,+,\cdot)$ حلقة الباقي أو القسمة

أمثلة:

مثال (1) $\mathbb{R}=(\mathbb{Z},+,\cdot)$ $\quad I=\langle 3\rangle$

فإن $\mathbb{R}/I$ تكون عناصرها $\mathbb{R}/I=\{I,1+I,2+I\}$

- إن العناصر السابقة هي صفوف تكافؤ لباقي العناصر

مثال $5+I=(2+3)+I=(2+I)+(3+I)$

$=(2+I)+I=2+I$

مثال (2) $\mathbb{R}=(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$ $\quad I=\langle 2\rangle=\{0,2,4\}$

فتكون $\mathbb{R}/I=\{0+I,1+I,3+I,5+I\}$

- إن العناصر السابقة هي صفوف تكافؤ لباقي العناصر:

مثال: $4+I=(2+2)+I=(2+I)+(2+I)$

$=I+I=I$

تم كتابة عناصر $\mathbb{R}/I$ بالنسبة للمثال (٢) كما يلي

أ. $0+I$ (العنصر المحايد للحلقة وصفر لأي حلقة)

ب. $\{1+I,3+I,5+I\}$ وهي العناصر الأولية مع 2

ملاحظة: $I+I\neq 2I$ (خطأ)

لأن I هي صفر الحلقة (بمعنى صفر + صفر = صفر)

4-2-3 مبرهنة: (مهمة جداً جداً)

لتكن R حلقة تبديلية و $\phi \neq I \subset R$

إن I مثالي في R $\longleftrightarrow$ كان I نواة لتشاكل حلقي.

البرهان:

$\Leftarrow$ (الاتجاه الأول)

ليكن: $\pi : R \longrightarrow R/I$ «يسمى هذا التشاكل بـ تشاكل طبيعي

$\pi(r) = r + I.$ أو الغمر القانوني»

لنبين أن $\ker(\pi) = I$

الاحتواء (1):

$x \in I \Longleftrightarrow x + I = I$ «من الملاحظة ٢»

$\Longleftrightarrow \pi(x) = I \Longleftrightarrow x \in \ker(x)$

ومنه I محتوى في $\ker(\pi)$

الاحتواء (2):

عن الاتجاه المعاكس للاحتواء (1) [الأسهم باتجاه الأخر]

ومنه: $I = \ker(\pi)$

$\rightarrow$ (الاتجاه الثاني):

ليكن I نواة لتشاكل حلقي مثل $\epsilon : R \longrightarrow S$ أي:

$I = \ker(\epsilon)$ ولنثبت أن I مثالي في R. لذا نتحقق من صحة الشرطين تبع المثالي

$\epsilon(0_R) = 0_S$

1* $\rightarrow 0 \in I \rightarrow I \neq \phi$

I نواة: $x, y \in I : \begin{cases} \epsilon(x) = 0 \\ \epsilon(y) = 0. \end{cases}$

$\epsilon(x) - \epsilon(y) = 0 \xrightarrow{\text{تشاكل}} \epsilon(x - y) = 0 \rightarrow x - y \in \ker(\epsilon) = I$

2* $\forall r \in R \quad x \in I$

$\epsilon(r.x) = r\epsilon(x) = r.0 = 0.$

$\rightarrow \quad r.x \in \ker(\varepsilon) = I$

ومنه $I \trianglelefteq \mathbb{R}$ وهو المطلوب

المبرهنة الأساسية في التشاكل:

مبرهنة:

لتكن $\varepsilon : R \rightarrow S$ تشاكل حلقي، فإن $\mathbb{R}/\mathrm{Kere}(\varepsilon) \cong \mathrm{Im}(\varepsilon)$.

البرهان:

نعرف العلاقة: $g : \mathbb{R}/I \longrightarrow \mathrm{Im}(\varepsilon)$

$$\forall \bar{x} = x + I \in \mathbb{R}/I \ : g(\bar{x}) = \varepsilon(x)$$

حيث $I = \mathrm{kere}\,\varepsilon$

1) g تطبيق:

$$\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}/I \ ; \ \bar{x} = \bar{y}$$

$$x + I = y + I \leftrightarrow x - y \in I$$

ε لأنه تشاكل $\varepsilon(x) = \varepsilon(y) \leftrightarrow \varepsilon(x-y) = 0 \leftrightarrow I = \mathrm{kere}(\varepsilon)$

$$\leftrightarrow g(\bar{x}) = g(\bar{y})$$

2) كان g متباين (لأخذ الاتجاه المعاكس):

3) g تشاكل حلقي:

$$\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}/I$$

1) $g(\bar{x} + \bar{y}) = \varepsilon(x+y) = \varepsilon(x) + \varepsilon(y)$

$= g(\bar{x}) + g(\bar{y})$

2) $r \in \mathbb{R} \quad \bar{x} \in \mathbb{R}/I$

لأنه تشاكل $g(\bar{x}.\bar{y}) = \varepsilon(x.y) = \varepsilon(x).\varepsilon(y)$

$= g(\bar{x}).g(\bar{y})$

4- g غامر:

$$z \in \mathrm{Im}(\varepsilon) ; \exists\, x \in \mathbb{R} ; \ z = \varepsilon(x) = g(\bar{x})$$

إذا كان $\epsilon: R \to S$ تشاكل حلقي غامر يجوز أن نكتب:

$R/kere(\epsilon) \cong S$

$z \in Im(\epsilon): \exists x \in R/I \; ; \; z = g(x)$

← وبالتالي: g غامر

$R/kere(\epsilon) \cong Im(\epsilon)$

مبرهنة:

ليكن $\epsilon: R \to S$ تشاكل حلقي فإن:

1- إذا كان $J \trianglelefteq S$ فإن $\epsilon^{-1}(J) \trianglelefteq R$

($\epsilon^{-1}(J)$ ليس التطبيق العكسي لأنه يجب أن يكون ϵ تقابل) ← $\epsilon^{-1}(J)$ صورة عكسية

2- إذا كان ϵ غامر و $J \trianglelefteq S$ فإن: $\epsilon^{-1}(J)/kere(\epsilon) \cong J$

بشكل عام $\epsilon^{-1}(J)/kere$ كلام خاطئ ويكون هنا صحيح لأن $kere(\epsilon) \in \epsilon^{-1}(J)$

3- إذا كان ϵ غامراً و $I \trianglelefteq R$ فإن $\epsilon(I) \trianglelefteq S$

أن ϵ غامر (شرط أساسي حتى يكون $\epsilon(I) \trianglelefteq S$)

الإثبات:

رقم (1)

* $I \neq \phi \to 0 \in \epsilon^{-1}(J) \to \epsilon^{-1}(J) \neq \phi$
* $x, y \in \epsilon^{-1}(J) \to \epsilon(x), \epsilon(y) \in J$

لأنه تشاكل → $\epsilon(x) - \epsilon(y) = \epsilon(x-y) \in J \to x-y \in \epsilon^{-1}(J)$

* $\forall r \in R \quad r\epsilon(y) \in J \to r.y \in \epsilon^{-1}(J)$

رقم (2) نعرف العلاقة: $g: \epsilon^{-1}(J) \to J$

$x \in \epsilon^{-1}(J): g(x) = \epsilon(x).$ — ϵ تشاكل حلقي

نعرف مقصور ϵ على J — g تشاكل حلقي.

وبالتالي يكون:

$x \in ker(g) \to 0 = \epsilon(x) = g(x).$

$\to x \in kere(\epsilon)$

$\to kere(g) = kere(\epsilon).$

حسب المبرهنة الأساسية في التماثل:

لم نستخدم كلمة غامر لـ f بالبرهان

$$\frac{f^{-1}(I)}{\ker(f)} = \frac{f^{-1}(J)}{\ker(g)} \cong Im(g) = J$$

لأن $f^{-1}(J)$ الصورة العكسية.

g غامر لأن: $x \in J \longrightarrow g(x) \in Im(J)$.

$x \in Im(g)$

تمرين (٣): حسب التعريف:

f غامر $I \trianglelefteq \mathbb{R}$ $\quad f(I) \overset{?}{\trianglelefteq} S$

شرط المثالي

$0 \in I \longrightarrow f(0) \in f(I) \longleftarrow$ $\quad$ * $f(I) \neq \phi$

لأنه غامر $\quad$ * $x, y \in f(I)$: $\exists a, b \in I$.

$y = f(b) \qquad x = f(a)$

لأنه تشاكل $\quad x - y = f(a) - f(b) = f(\underbrace{a-b}_{\in I}) \in f(I)$

$x \in f(I)$, $s \in S$ * لأنه غامر

$\exists r \in \mathbb{R}$, $a \in I$.

$s = f(r)$, $x = f(a)$

لأنه تشاكل $\quad s \cdot x = f(r) \cdot f(a) = f(\underbrace{r \cdot a}_{\in I}) \in f(I)$

تمرين:

$\mathbb{R}$ حلقة، S حلقة جزئية من $\mathbb{R}$ و $I \trianglelefteq \mathbb{R}$. أثبت أن:

١. $I \cap S \trianglelefteq S$

٢. إذا كان $I \subseteq S$ فأثبت أن $I \trianglelefteq S$

(I حلقة جزئية من S)

مبرهنة (٢) بالتماثل:

لتكن R حلقة و $I, J \trianglelefteq R$ إن القضايا التالية صحيحة:

1) $I+J/I \cong J/I\cap J$ (حتى لو بدلنا بين I , J بالمكان نفس الشيء)

2) $J \subseteq I$ فإن $R/J \,/\, I/J \cong R/J$

(يجب ان يكون المقام محتوى في البسط)

ملاحظة:

١. إن الحلقات الجزئية في $(R/I, +, \cdot)$ تكون من الشكل

J/I حيث $I \subseteq J$

٢. إن المثاليات في الحلقة J/I حيث $I \trianglelefteq J$

كل مثالي هو حلقة جزئية ولكن العكس ليس صحيح