لتكن :
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$f(x,y) = (y-x^2)(y-2x^2)$$

1) اثبت أن (0,0) نقطة حرجة للدالة f
2) برهن أن (0,0) هي نقطة صغرى نسبية للمحور f على أي مستقيم مار من (0,0)
3) اثبت أنه أياً كان الجوار $N((0,0),\delta)$ للنقطة (0,0) هنا لاد دائماً يكون $f(x,y)>0$ ونقاط يكون فيها $f(x,y)<0$
(الهدف أن أبرهن أنها ليست صغرى)

الحل: آخذ المشتقات الجزئية بالنسبة لـ x و y

$$f_x(x,y) = -2x(y-2x^2) - 4x(y-x^2)$$

$$f_x(0,0) = 0$$

$$f_y(x,y) = (y-2x^2) + (y-x^2)$$

$$f_y(0,0) = 0$$

$\Longleftarrow$ (0,0) نقطة حرجة

2) $y = \alpha x$

$$f(x,\alpha x) = (\alpha x - x^2)(\alpha x - 2x^2)$$

ملاحظة: $\mathbb{R}^3$ في

: $\underbrace{f_{11}>0 \;,\; \Delta_1>0 \;,\; \Delta_2>0}_{\text{صغرى}}$ ، $\underbrace{f_{11}<0 \;,\; \Delta_1>0 \;,\; \Delta_2<0}_{\text{عظمى}}$

في $\mathbb{R}^n$: $f_{11}>0$ ، $\Delta_1 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} > 0$ ، $\Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix} > 0$

صغرى

الموضوع: خطأ

التاريخ: / / ٢٠

$f_{11}<0$ ، $\Delta_1>0$ ، $\Delta_2<0$

تكملة التمرين:

$$f_x(x,\alpha x)=(\alpha x-x^2)(\alpha x-2x^2)$$

$$f_x(x,\alpha x)=(\alpha-2x)(\alpha x-2x^2)+(\alpha-4x)(\alpha x-x^2)$$

$$f_x=\alpha^2x-2\alpha x^2-2\alpha x^2+4x^3+\alpha^2x-\alpha x^2-4\alpha x^2$$
$$+4x^3$$

$$f_x(x,\alpha x)=2\alpha^2x-9\alpha x^2+8x^3$$
$$f_{xx}(x,\alpha x)=2\alpha^2-8\alpha x+24x^2$$

$$f_{xx}(0,0)=2\alpha^2>0=f(0,0)$$

(0,0) هي نقطة نهاية صغرى محلية للمحور f على المستقيم المار بـ (0,0)

3) $N((0,0),\delta)$ جوار لـ $(0,0)$

$(0,\frac{\delta}{2})\in N((0,0),\delta)$ ، $\Delta=0$

$$f(0,\frac{\delta}{2})=\frac{\delta^2}{4}>0=f(0,0)$$

نأخذ نقطة ثانية ولتكن $(\frac{\delta^2}{2},\frac{\delta^2}{2})$ ولنتحقق فيما إذا كانت تنتمي للجوار $N((0,0),\delta)$ أم لا لدينا:

$$\|(\frac{\delta}{\sqrt{3}},\frac{\delta^2}{2})\|<\delta \Longrightarrow \frac{\delta^2}{3}+\frac{\delta^2}{4}\overset{?}{<}\delta^2$$

نخرج δ^2 عامل مشترك:

$$\delta^2(\frac{1}{3}+\frac{\delta^2}{4})\overset{?}{<}\delta^2$$

أي أن

$$\frac{1}{3}+\frac{\delta^2}{4}<1\Rightarrow\frac{\delta^2}{4}<\frac{2}{3}\Rightarrow\delta^2<\frac{8}{3}\Rightarrow\delta<\sqrt{\frac{8}{3}}$$

ومن هذا الشرط تكون النقطة تنتمي للجوار

$$f\left(\frac{\delta}{\sqrt{3}}, \frac{\delta^2}{2}\right) = \left(\frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^2}{3}\right)\left(\frac{\delta^2}{2} - \frac{2\delta^2}{3}\right)$$ حسب مبرهنة

$$= \left(\frac{\delta^2}{6}\right)\left(-\frac{\delta^2}{6}\right) = \frac{-\delta^4}{36} < 0$$

$$f\left(\frac{\delta}{\sqrt{3}}, \frac{\delta^2}{2}\right) < f(0,0) \Rightarrow (0,0)$$

نقطة قيمة عظمى نسبية صغرى نسبية

$$\delta < \sqrt{\frac{8}{3}}$$

$\Leftarrow$ $(0,0)$ ليست قصوى

$f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 + x^4 + y^4$$

$$g(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 - x^4 - y^4$$

1) بين أن $(0,0)$ نقطة حرجة لكل من هاتين الدالتين
2) أثبت أن $\Delta = 0$ في النقطة $(0,0)$ لكل من f, g
3) برهن أن $(0,0)$ هي نقطة قيمة صغرى نسبية لـ f وليست قصوى بالنسبة لـ g

الحل:

$$f_x(x,y) = 2x - 2y + 4x^3$$
$$\Rightarrow f_x(0,0) = 0$$

$$f_y(x,y) = -2x + 2y + 4y^3$$
$$\Rightarrow f_y(0,0) = 0$$

$$g_x(x,y) = 2x - 2y - 4x^3 \Rightarrow g_x(0,0) = 0$$

$$g_y(x,y) = -2x + 2y - 4y^3 \rightarrow g_y(0,0) = 0$$

$(0,0)$ حرجة

$$f_{xx}(x,y) = 2 + 12x^2$$

$f_{xx}(0,0) = 2$

$$f_{yy}(x,y) = 2 + 12y^2$$

$\Rightarrow f_{yy}(0,0) = 2$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -2$$

$f(x,y) = -2$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$g_{xx}(x,y) = 2 - 12x^2 \Rightarrow g_{xx}(0,0) = 2$

$g_{yy}(x,y) = 2 - 12y^2 \Rightarrow g_{yy}(0,0) = 2$

$g_{xy}(x,y) = g_{yx}(x,y) = -2$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$f(x,y) = (x-y)^2 + x^4 + y^4 > 0$

$\Rightarrow f(x,y) > f(0,0)$

$(0,0)$ صغرى نسبية مطلقة

اثبات أن الدالة ليست عظمى

اذا كان $N((0,0),\delta)$

$(0, \frac{\delta}{2}) \in N((0,0),\delta)$

$$g(0, \frac{\delta}{2}) = \frac{\delta^2}{4} - \frac{\delta^4}{16} = \frac{\delta^2}{4}(1 - \frac{\delta^2}{4})$$

إذا $\frac{\delta^2}{4}(1 - \frac{\delta^2}{4}) > 0$ فيكون

$(1 - \frac{\delta^2}{4} > 0) \Longrightarrow \frac{\delta^2}{4} < 1 \Rightarrow \delta^2 < 4 \Rightarrow \delta < 2$

ومنه $g(0, \frac{\delta}{2}) > 0 = g(0,0)$

صغرى $(0,0) \Leftarrow$

$$\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right) \in N((0,0), \delta)$$

$$g\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right) = \frac{\delta^2}{4} - 2\frac{\delta^2}{4} + \frac{\delta^2}{4} - \frac{\delta^4}{16} - \frac{\delta^4}{16}$$

$$= \frac{-2\delta^4}{16} = \frac{-\delta^4}{8} < 0 = g(0,0)$$

(0,0) نقطة سرجية وبالتالي (0,0) ليست قصوى للدالة g

[3

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = y^2 + x^2y + x^4$$

1) أوجد النقاط الحرجة (نفس الأسئلة في التمارين السابقة)

أثبت أن (0,0) نقطة حرجة ثم ادرس فيما إذا كانت نقطة قصوى للدالة f

الحل: أثبت أن (0,0) حرجة:

$$f_x(x,y) = 2xy + 4x^2$$

$$f_x(0,0) = 0$$

$$f_y(x,y) = 2y + x^2$$

$$f_y(0,0) = 0$$

(0,0) حرجة

$$f_{xx}(x,y) = 2y + 12x^2 \implies f_x(0,0) = 0$$

$$f_{yy}(x,y) = 2$$

$$f_{xy} = 2x \quad , \quad f_{yx}(x,y) = 2x$$

$$f_{xy}(0,0) = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$f(0,0) = 0$$

[لنا عدم استخدام الجوار نستخدم $f(x,y) - f(0,0)$ وندرس فيما إذا كانت أكبر أو أصغر من الصفر]

$$f(x,y) - f(0,0) = y^2 + x^2 y + x^4$$

$$\Delta = x^4 - 4x^4 = -3x^4 < 0$$

+ إشارة المقدار من إشارة أمثال ال y^2

$$\Rightarrow f(x,y) - f(0,0) > 0 \Rightarrow f(x,y) > f(0,0)$$

$(0,0)$ صغرى نسبية ومطلقة.

وظيفة: $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

أوجد النقاط الحرجة وادرس إمكانية أن تكون كل منها نقطة حدية للدالة f

$(0,0)$, $(\mp\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$

حل:

$(f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$

(c $f(x,y) = \sin x + \sin y - \sin(x+y)$

جد نقاط القيم القصوى النسبية داخل المثلث المحدد بالمحورين ox , oy والمستقيم الذي معادلته $x+y = 2\pi$

(٢ $f(x,y) = (x+y-3)\, e^{\frac{x^3+y^3}{3}}$

أوجد النقاط الحرجة لهذه الدالة وحدد إذا كانت هذه النقطة هي نقاط قيمة قصوى نسبية للدالة f

النقاط الحرجة هي: $(1,1)$, $(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2})$

$(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ $(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$