/ /

نمذجة رياضية

المحاضرة الرابعة عشرة

٢٦/٤/٢٠١٥

مسألة أمثلي مع k قيد مساواة:

لنأخذ تابعاً $f(x)$ خاضعاً لـ k قيد مساواة من الشكل:

$$g_i(x) = b_i \qquad ; \ i = 1, \dots, k$$

وحيث x هو شعاع من j مركبة، حيث $j \geq k$

ندخل على هذه المسألة k عدداً حقيقياً غير سالب $\lambda_i \geq 0$

ونفرض أن للمسألة قيمة أعظمية x^*

والمطلوب: إيجاد القيمة الأعظمية للتابع: $f(x) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x)$ ①

نرمز لمجموعة الحلول الممكنة بـ S، عندها يوجد x^* تجعل التابع السابق أعظمياً،

ندعو التابع ① بتابع لاغرانج اللاغرانجي.

بما أن x^* قيمة أعظمية يتحقق ما يلي:

$$f(x^*) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x^*) \geq f(x) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x)$$

$$\Longrightarrow f(x^*) \geq f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \left[g_i(x^*) - g_i(x) \right]$$

بما أن x^* تجعل التابع ① أعظمياً عندها يكون الحد: $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \left[g_i(x^*) - g_i(x) \right]$

غير سالب من أجل جميع القيم النافذة في جوار x^*.

وبالتالي يمكن حذف هذا الحد وتبقى المتراجحة محققة:

$$f(x^*) \geq f(x)$$

ALADIIB.net

أبناء الحضارة

/ /

- مما سبق نصل إلى المبرهنة التالية:

1) إن قيم λ_i (حيث $i=1,...,k$) أعداد حقيقية غير سالبة.

2) إذا كان x^* يجعل التابع ① أعظمياً، حيث $x \in S$ عندئذ x^* يجعل $f(x)$ أعظمياً من أجل كل قيم x النافذة.

ومنه نستفيد بالآتي:

من أجل أي خيار لـ λ_i غير سالبة (حيث $i=1,....k$)، إذا أمكن إيجاد نهاية عظمى غير مقيدة لتابع إيفرت اللاغرانجي ① فهذا الحل سيكون حلاً للمسألة الأصلية المقيدة.

- وهنا نلاحظ أن المسألة التي حُلّت باختيار مجموعة قيم λ_i غير السالبة قد لا تكون هي المسألة التي نرغب بحلها.

بتعبير آخر: لقد قمنا بحل مسألة مقيدة ولكنها قد لا تكون ذات المسألة التي نريد حلها.

وذلك لأن المسألة التي نريد حلها هي التي تكون فيها جميع الموارد (شعاع الطرف الثاني b) مستخدمة بشكل كامل.

ويكمن الفكرة باختيار λ_i بحيث تقربنا من مجموعة قيودنا الأصلية.

- ونلخص ما سبق بما يلي:

خوارزمية الحل:

1) نختار مجموعة مضاريب لاغرانج غير السالبة ونحول المسألة المقيدة إلى مسألة غير مقيدة حيث شكل التابع: $L = f(x) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x)$

2) نقوم بإيجاد x^* شعاع الحل الأمثل للتابع الجديد غير المقيد.

3) نحسب $g_i(x^*)$ (حيث $i=1,...,k$).

4) إذا كان $g_i(x^*) = b_i$ من أجل كل i نكون قد حصلنا على المطلوب.

وإذا كان $g_i(x^*) \neq b_i$ نعود ونكرر الخطوة الأولى إلى أن نصل إلى المطلوب.

/ /

مسألة: يراد وضع وعاء ماء في جدار مركبة فضائية.
الوعاء مصمم على شكل كرة فوقها مخروط قطر قاعدته مساوٍ لنصف قطر الكرة.
فإذا كان نصف قطر الكرة محدود بـ 6 أمتار، ومساحة السطح المتاح 450 م²
المطلوب: إيجاد ارتفاع المخروط وارتفاع القبة الكروية المقطوعة بحيث يكون
حجم الوعاء أعظمياً.

مثال: أوجد القيمة الأصغرية للتابع:

$$f(x) = 9.43x_1 - 14.14x_2 - 0.52x_2^3 + 905.143$$

مع مراعاة القيد:

$$9.43\sqrt{x_1^2+9} - 3.14x_2^2 = 25.714$$

الحل:

$$L = 9.43x_1 - 14.14x_2 - 0.52x_2^3 + 905.143 - \lambda\left(9.43\sqrt{x_1^2+9} - 3.14x_2^2\right)$$

* $\lambda = 0 \Longrightarrow x_1^* = \infty$ مرفوض.
* $\lambda = 3 \Longrightarrow g = 27.99$
* $\lambda = 2 \Longrightarrow g = 26.94$
* $\lambda = 1.9 \Longrightarrow g = 26.28$
* $\lambda = 1.8 \Longrightarrow g = 25.89$

نلاحظ أننا اقتربنا كثيراً من الطرف الثاني للقيد.
وبالتالي يمكن أن نقبل الحل المقابل لِـ $\lambda = 1.8$

نهاية المحاضرة الرابعة عشرة