Subject: / /

نمذجة رياضية

المحاضرة العشرون

٢٠١٥/٥/١١

الشكل الرياضي لمسائل البرمجة الديناميكية :

1 حالة وحيد البعد ووحيد المؤثر :

توضح أسلوب البرمجة الديناميكية بالعلاقات التالية :

$$z_i = F_i(x_i) \quad ; \quad i = \overline{1,n}$$

حيث z_i هو تابع الحالة الذي يعبّر عن الحالة التي وصلت إليها المسألة في مرحلة جزئية معينة .

وحيث x_i هو متحول القرار في المرحلة i .

حيث أنه توجد علاقة بين تابع الحالة z_i في مرحلة معينة i ، وتابع الحالة في المرحلة السابقة z_{i-1} والقرار في المرحلة i .

ويمكن صياغتها بالشكل التالي: $z_i = g_i(x_i , z_{i-1})$

وهنا نحسب قيمة تابع الهدف G أي قيمة المؤثر الذي نبحث عنه وفقاً لتوابع الهدف الجزئية في المراحل السابقة ، وذلك من خلال العلاقة التالية :

$$G_i(z_i) = F_i(x_i , z_{i-1} , z_i)$$

ويجب أن يأخذ قيمة مثلى عند كل مرحلة معطاة بالعلاقة :

$$G_n^*(z_n) = \underset{x_n}{opt}\left[F_n(x_n , z_{n-1} , z_n) + G_{n-1}^*(z_{n-1})\right]$$

حيث $G_n^*(z_n)$ تابع الهدف المثالي في المرحلة n (الأخيرة)

$G_{n-1}^*(z_{n-1})$ تابع الهدف المثالي في المرحلة $n-1$ السابقة

Subject: / /

وتحل هذه المعادلات بالشكل الآتي :

$$G_1^*(Z_1) = \underset{x_1}{opt}\left[F_1(x_1, Z_0, Z_1) + G_0^*(Z_0)\right]$$

$$G_2^*(Z_2) = \underset{x_2}{opt}\left[F_2(x_2, Z_1, Z_2) + G_1^*(Z_1)\right]$$

$\vdots$

ولكل علاقة من العلاقات السابقة قيد :

$$Z_1 = g_1(x_1, Z_0)$$
$$Z_2 = g_2(x_2, Z_1)$$
$$\vdots$$

وهذه العلاقات مع المقيدات شاملة لكافة مسائل البرمجة الديناميكية ذات البعد الواحد.

مسألة: تبلغ ميزانية شركة 5 مليون، تريد توزيعها على 4 مشاريع استثمارية مختلفة.

فإذا علمت أن لكل استثمار مردودية معينة مقابلة لكل مبلغ واحد مليون، وهي موضحة في الجدول المرفق التالي :

المشاريع / المبالغ	$F_1(x_1)$	$F_2(x_2)$	$F_3(x_3)$	$F_4(x_4)$
0	0	0	0	0
1	0.56	0.5	0.3	0.4
2	0.9	0.82	0.5	0.66
3	1.3	1.1	0.8	0.84
4	1.56	1.3	1.00	0.96
5	1.8	1.5	0.24	1.06

Subject: / /

المطلوب: إيجاد التوزيع الأمثل للميزانية بين المشاريع الأربعة بحيث نحصل على مردودية عظمى.

الحل: نفرض متحولات القرار x_i التي تعبّر عن المبالغ المخصصة لكل مشروع من المشاريع.

Z_i هو تابع الحالة في كل مرحلة من المراحل يعطى بالعلاقة:

$$Z_i = x_i + Z_{i-1}$$

أي أن قيمة Z_i تعبّر عن المبلغ المخصص للمرحلة i وجميع المراحل التي قبلها.

معادلات الحل: $G_n^*(Z_n) = \underset{x_n}{opt}\left[F_n(x_n) + G_{n-1}^*(Z_{n-1})\right]$

حالة ابتدائية:

$$\begin{cases} G_1^*(Z_1) = F_1(x_1) \\ G_2^*(Z_2) = \underset{x_2}{Max}\left[F_2(x_2) + G_1^*(Z_1)\right] \\ G_3^*(Z_3) = \underset{x_3}{Max}\left[F_3(x_3) + G_2^*(Z_2)\right] \\ G_4^*(Z_4) = \underset{x_4}{Max}\left[F_4(x_4) + G_3^*(Z_3)\right] \end{cases}$$

* في المرحلة Z_1: $Z_1 = x_1 + Z_0 = x_1$

Z_1	x_1	$G_1^*(Z_1)$
0	0	0
1	1	0.56
2	2	0.9
3	3	1.3
4	4	1.56
5	5	1.8 ←

إن الحل الأمثل المرحلي هنا هو $Z_1 = 5$ أي $x_1 = 5$.

(معنى ذلك أننا مبدئياً سنخصص كل المبلغ للمشروع الأول طالما لم ندرس غيره بعد)

Subject:

* في المرحلة Z_2 : $Z_2 = x_2 + Z_1$

Z_2	x_2	$F_2(x_2)$	Z_1	$G_1^*(Z_1)$	$G_2(Z_2)$
0	0	0	0	0	$\boxed{0}$
1	0	0	1	0.56	$\boxed{0.56}$
	1	0.5	0	0	0.5
2	0	0	2	0.9	0.9
	1	0.5	1	0.56	$\boxed{1.06}$
	2	0.82	0	0	0.82
3	0	0	3	1.3	1.3
	1	0.5	2	0.9	$\boxed{1.4}$
	2	0.82	1	0.56	1.38
	3	1.1	0	0	1.1
4	0	0	4	1.56	1.56
	1	0.5	3	1.3	$\boxed{1.8}$
	2	0.82	2	0.9	1.72
	3	1.1	1	0.56	1.66
	4	1.3	0	0	1.3
5	0	0	5	1.8	1.8
	1	0.5	4	1.56	2.06
	2	0.82	3	1.3	$\boxed{2.12}$
	3	1.1	2	0.9	2.0
	4	1.3	1	0.56	1.86
	5	1.5	0	0	1.5

Subject:

لننشئ جدولاً مختصراً لـ Z_2 ونضع فيه القيم الأمثلية فقط :

Z_2	x_2	$G_2^*(Z_2)$
0	0	0
1	0	0.56
2	1	1.06
3	1	1.4
4	1	1.8
5	2	2.12 ←

إن الحل الأمثل المرحلي في المرحلة Z_2 هو : $Z_2 = 5$, $\boxed{x_2 = 2}$

$Z_2 = x_2 + Z_1$

$5 = 2 + Z_1 \Longrightarrow Z_1 = 3 \Longrightarrow \boxed{x_1 = 3}$

* في المرحلة Z_3 : $Z_3 = x_3 + Z_2$

إن جدول الحل الموجود في الصفحة التالية ينتج عنه الجدول المختصر لـ Z_3 التالي :

Z_3	x_3	$G_3^*(Z_3)$
0	0	0
1	0	0.56
2	0	1.06
3	0	1.4
4	0	1.8
5	0	2.12 ←

الحل الأمثل المرحلي في المرحلة Z_3 هو : $Z_3 = 5$, $\boxed{x_3 = 0}$

$Z_3 = x_3 + Z_2$

$5 = 0 + Z_2 \Longrightarrow Z_2 = 5 \Longrightarrow \boxed{x_2 = 2}$, $\boxed{x_1 = 3}$

Subject:

Z_3	x_3	$F_3(x_3)$	Z_2	$G_2^*(Z_2)$	$G_3(Z_3)$
0	0	0	0	0	$\boxed{0}$
1	0	0	1	0.56	$\boxed{0.56}$
	1	0.3	0	0	0.3
2	0	0	2	1.06	$\boxed{1.06}$
	1	0.3	1	0.56	0.86
	2	0.5	0	0	0.5
3	0	0	3	1.4	$\boxed{1.4}$
	1	0.3	2	1.06	1.36
	2	0.5	1	0.56	1.06
	3	0.8	0	0	0.8
4	0	0	4	1.8	$\boxed{1.8}$
	1	0.3	3	1.4	1.7
	2	0.5	2	1.06	1.56
	3	0.8	1	0.56	1.36
	4	1	0	0	1
5	0	0	5	2.12	$\boxed{2.12}$
	1	0.3	4	1.8	2.1
	2	0.5	3	1.4	1.9
	3	0.8	2	1.06	1.86
	4	1	1	0.56	1.56
	5	1.24	0	0	1.24

Subject: .... / /

* إن المرحلة Z_4 هي المرحلة الأخيرة ، لذا نأخذ القيمة العظمى $Z_4 = 5$

ولدينا: $Z_4 = x_4 + Z_3$

Z_4	x_4	$F_4(x_4)$	Z_3	$G_3^*(Z_3)$	$G_4(Z_4)$
5	0	0	5	2.12	2.12
	1	0.4	4	1.8	$\boxed{2.2}$
	2	0.66	3	1.4	2.06
	3	0.84	2	1.06	1.90
	4	0.96	1	0.56	1.52
	5	1.06	0	0	1.06

إن الحل الأمثل المرحلي في المرحلة Z_4 هو الحل الأمثل الشامل للمسألة، وهو:

$Z_4 = 5 \quad , \quad \boxed{x_4 = 1}$

$$\begin{cases} Z_4 = x_4 + Z_3 \\ 5 = 1 + Z_3 \Rightarrow Z_3 = 4 \Rightarrow \boxed{x_3 = 0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_3 = x_3 + Z_2 \\ 4 = 0 + Z_2 \Rightarrow Z_2 = 4 \Rightarrow \boxed{x_2 = 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_2 = x_2 + Z_1 \\ 4 = 1 + Z_1 \Rightarrow Z_1 = 3 \Rightarrow \boxed{x_1 = 3} \end{cases}$$

وإن قيمة دالة الهدف عند هذا الحل تكون: $G = 2.2$

أي سنقوم بـ: تخصيص 3 مليون للمشروع الأول

تخصيص 1 مليون للمشروع الثاني

تخصيص 0 مليون للمشروع الثالث

تخصيص 1 مليون للمشروع الرابع.

Subject: / /

مسألة:

لدى شركة إنتاجية ثلاثة أقسام مختلفة تريد تخصيصها بـ 6 مهندسين فإذا علمت أنه في كل قسم مردودية معينة من جراء التعيين لأي مهندس فيه وهذا الربح معطى بالجدول التالي:

الأقسام \ عدد المهندسين	0	1	2	3	4	5	6
I	19	20	24	29	33	36	42
II	20	21	25	30	33	37	47
III	30	32	34	34	45	51	55

المطلوب: توزيع المهندسين الستة على الأقسام الثلاثة بحيث نحصل على أكبر مردودية ممكنة ضمن الشروط التالية:

- تحرص الشركة على تعيين 3 مهندسين على الأكثر في القسم الثالث
- في القسمين الأول والثاني يجب ألا يقل عدد المهندسين عن 2 في كل منهما

الحل: نفرض متحولات القرار x_1, x_2, x_3

عدد المهندسين المعينين في الأقسام I, II, III على الترتيب.

وعليها القيود: $x_1 \geq 2$, $x_2 \geq 2$, $x_3 \leq 3$

تابع الحالة: $Z_i = x_i + Z_{i-1}$.

معادلات الحل:

$$\begin{cases} G_1^*(Z_1) = F_1(x_1) \\ G_2^*(Z_2) = \max\limits_{x_2} \left[F_2(x_2) + G_1^*(Z_1) \right] \\ G_3^*(Z_3) = \max\limits_{x_3} \left[F_3(x_3) + G_2^*(Z_2) \right] \end{cases}$$

* في المرحلة Z_1 : $Z_1 = x_1 + Z_0 = x_1$

إن القيم المحتملة لـ Z_1 هي القيم الممكنة لـ x_1.

بما أن $x_1 \geq 2$ فإنه يمكن لـ x_1 أن تأخذ القيم $2, 3, 4, 5, 6$

ولكن لو كانت $x_1 = 5$ عندئذٍ لن يبقى سوى مهندس واحد للأقسام الأخرى

وهذا غير مقبول لأن $x_2 \geq 2$.

وكذلك سيتم رفض القيمة $x_1 = 6$ لنفس السبب.

Z_1	x_1	$G_1^*(Z_1)$
2	2	24
3	3	29
4	4	33

من السطر الأول في الجدول المعطى

* في المرحلة Z_2 : $Z_2 = x_2 + Z_1$

هنا يُضاف لـ Z_1 مقدار 2 على الأقل، وبالتالي القيم المحتملة لـ Z_2 هي $4, 5, 6$

Z_2	x_2	$F_2(x_2)$	Z_1	$G_1^*(Z_1)$	$G_2(Z_2)$
4	2	25	2	24	$\boxed{49}$
5	2	25	3	29	$\boxed{54}$
	3	30	2	24	$\boxed{54}$
6	2	25	4	33	58
	3	30	3	29	$\boxed{59}$
	4	33	2	24	57

Subject: / /

* إن المرحلة Z_3 هي المرحلة الأخيرة ، لذا نأخذ القيمة العظمى $Z_3 = 6$

ولدينا : $Z_3 = x_3 + Z_2$

Z_3	x_3	$F_3(x_3)$	Z_2	$G_2^*(Z_2)$	$G_3(Z_3)$
6	0	30	6	59	$\boxed{89}$
	1	32	5	54	86
	2	34	4	49	83

إن الحل الأمثل هو المقابل لـ : $Z_3 = 6$, $\boxed{x_3 = 0}$

$$\begin{cases} Z_3 = x_3 + Z_2 \\ 6 = 0 + Z_2 \Longrightarrow Z_2 = 6 \Longrightarrow \boxed{x_2 = 3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_2 = x_2 + Z_1 \\ 6 = 3 + Z_1 \Longrightarrow Z_1 = 3 \Longrightarrow \boxed{x_1 = 3} \end{cases}$$

أي أن التوزيع المثالي هو :

القسم الأول 3 مهندسين

القسم الثاني 3 مهندسين

القسم الثالث 0 مهندس .

والمردودية ستكون 89 .

نهاية المحاضرة العشرون