الخميس: 2015/5/7

المحاضرة الرابعة عشرة

حل الوظيفة:

1 ابحث عن الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية في جوار الصفر:

$$z(1-z)\,w'' - (1+z)\,w' + w = 0$$

الحل:

نضرب طرفي المعادلة بـ z.

$$z^2(1-z)\,w'' - z(1+z)\,w' + z\,w = 0$$

$$a(z) = -\frac{(1+z)}{z(1-z)} \quad , \quad b(z) = \frac{1}{z(1-z)}$$

$z=0$ نقطة شاذة منتظمة

نكتب المعادلة الدليلية:

$$\lambda(\lambda-1) + c_0\lambda + d_0 = 0$$

$$a_1(z) = z\cdot a(z) = \frac{-(1+z)}{(1-z)} \Rightarrow a_1(0) = -1 = c_0$$

$$b_1(z) = z^2\, b(z) = \frac{z}{1-z} \Rightarrow b_1(0) = 0 = d_0$$

نعوض:

$$\lambda(\lambda-1) - \lambda = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda-2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$$
$$\lambda_2 = 2$$

نبحث عن حل من الشكل:

$$w = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k\, z^{k+\lambda} \quad ; \quad c_0 \neq 0$$

$$w' = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+\lambda) c_k z^{k+\lambda-1} \quad , \quad w'' = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+\lambda)(k+\lambda-1) c_k z^{k+\lambda-2}$$

نعوض :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k (k+\lambda)(k+\lambda-1) z^{k} - \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (k+\lambda)(k+\lambda-1) z^{k+1} -$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k (k+\lambda) z^{k} - \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (k+\lambda) z^{k+1} + \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^{k+1} = 0$$

بالمطابقة :

$$z^0 : \quad c_0 \lambda(\lambda-1) - \lambda c_0 = 0$$

$$c_0 [\lambda(\lambda-2)] = 0 \quad ; \quad c_0 \neq 0$$

$$\lambda(\lambda-2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \ , \ \lambda_2 = 2$$

$$z^k : \quad (k+\lambda)(k+\lambda-1) c_k - (k+\lambda-1)(k+\lambda-2) c_{k-1} - c_k (k+\lambda)$$

$$- c_{k-1} (k+\lambda-1) + c_{k-1} = 0$$

$$c_k [(k+\lambda)(k+\lambda-2)] - c_{k-1} [(k+\lambda)(k+\lambda-2)] = 0 \ ; \ \forall k \geq 1$$

$$\text{for } \lambda_1 = 0 \Rightarrow c_k k(k-2) - c_{k-1} k(k-2) = 0$$

وهي معادلة ترجعية .

$$k = 1 \Rightarrow -c_1 + c_0 = 0 \Rightarrow c_0 = c_1$$

$$k = 2 \Rightarrow 0 c_2 = 0 c_1$$ ومنه c_2 اختيارية

$k=3 \Rightarrow c_3 = c_2$

$k=4 \Rightarrow c_4 = c_3 = c_2$

$\vdots$

$c_k = c_2$

ومنه:

$$w_1 = z^0 \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$$

$$= z^0 [c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots]$$

$$w_1 = [c_0 + c_0 z + c_2 z^2 + c_2 z^3 + c_2 z^4 + \dots]$$

$$w_1 = [c_0(1+z) + c_2 z^2 [1 + z + z^2 + \dots]$$

$$w_1 = c_0 (1+z) + c_2 \frac{z^2}{1-z}$$

حيث c_0 ، c_2 اختيارية.

ومنه الحل الأول يؤول إلى الحل العام

$$w = c_0 (1+z) + c_2 \frac{z^2}{1-z}$$

مثال:

ابحث في الحل العام للمعادلة التفاضلية في جوار الصفر:

$$z(z-1)w'' - zw' + w = 0$$

الحل: نضرب طرفي المعادلة بـ z.

$$z^2(z-1)w'' - z^2 w' + zw = 0$$

$$a(z) = -\frac{1}{z-1} \quad ; \quad b(z) = \frac{1}{z(z-1)}$$

$z=0$ نقطة شاذة منتظمة.

نكتب المعادلة الدليلية :

$$\lambda(\lambda-1)+\lambda c_0+d_0=0$$

$$a_1(z)=z\cdot a(z)=\frac{-z}{z-1} \Rightarrow a_1(0)=0=c_0$$

$$b_1(z)=z^2\cdot b(z)=\frac{z}{z-1} \Rightarrow b_1(0)=0=d_0$$

$$\Rightarrow \lambda(\lambda-1)=0 \Rightarrow \lambda_1=0,\quad \lambda_2=1$$

نبحث عن حل من الشكل:

$$w=\sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^{k+\lambda} \quad ; \quad c_0\neq 0$$

$$w'=\sum_{k=0}^{+\infty} c_k (k+\lambda) z^{k+\lambda-1} \quad , \quad w''=\sum_{k=0}^{+\infty}(k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k z^{k+\lambda-2}$$

نعوض:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k z^{k+1}-\sum_{k=0}^{\infty}(k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k z^{k} -$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k(k+\lambda)z^{k+1}+\sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^{k+1}=0$$

بالمطابقة:

$$z^0: \quad -\lambda(\lambda-1)c_0=0 \Rightarrow \lambda_1=0,\lambda_2=1$$

$$z^k: \quad (k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k=\left[(k+\lambda-1)(k+\lambda-3)+1\right]c_{k-1}$$

$$\text{for } \lambda_1=0 \Rightarrow k(k-1)c_k=\left[(k-1)(k-3)+1\right]c_{k-1}$$

$$k(k-1)c_k=(k-2)^2c_{k-1} \quad , \forall k\geq 1$$

$$k=1 \Rightarrow 0c_1=c_0=0$$

ولكن $c_0\neq 0$ وبالتالي

هذا غير ممكن وبالتالي لا يوجد حل من أجل هذا الجذر

for $\lambda_2 = 1 \Rightarrow k(k+1)c_k = (k-1)^2 c_{k-1}$

$k=1 \Rightarrow c_1 = 0$

$c_2 = c_3 = \dots = 0$

$w_1 = c_0 z$ $\qquad$ $c_0 = 1$ اختيارية

لإيجاد الحل الثاني نجري التحويل:

$w_2 = w_1 . u$

$$w_2 = w_1 \int \frac{e^{-\int a(z)\, dz}}{(w_1)^2} . dz$$

$$w_2 = z \int \frac{e^{\int \frac{1}{z-1} dz}}{z^2} dz = z \int \frac{e^{\ln z-1}}{z^2} dz = z \int \frac{z-1}{z^2} dz$$

$w_2 = z\left[\ln z + \frac{1}{z}\right] = z \ln z + 1$ $\qquad$ إذن الحل العام هو تركيب خطي من هذين الحلين.

مثال:

ابحث عن الحل العام للمعادلة التفاضلية في جوار الصفر:

$$z(z^2-1)w'' + 2z^3 w' + 6w = 0$$

الحل.

$z = 0$ نقطة شاذة منتظمة،

$\lambda = 3 \ , \quad \lambda = -2$ $\qquad$ جذرا المعادلة الدليلية.

نبحث عن حل من الشكل:

$$w = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^{k+\lambda} \quad , \quad c_0 \neq 0$$

بالاشتقاق والتعويض في المعادلة:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k (k+\lambda)(k+\lambda-1) z^{k+2} - \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (k+\lambda)(k+\lambda-1) z^{k} + 2 \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (k+\lambda) z^{k+2} + 6 \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k = 0$$

بالمطابقة:

z^0: $(-\lambda(\lambda-1)+6)\, c_0 = 0 \quad ; \quad c_0 \neq 0$

$\lambda_1 = 3 , \quad \lambda_2 = -2$

z^1: $[-\lambda(\lambda+1)+6]\, c_1 = 0$

$\Rightarrow c_1 = 0$

z^k: $(k+\lambda-3)(k+\lambda+2)\, c_k = (k+\lambda-2)(k+\lambda-1)\, c_{k-2} \; ; k \geq 2$

$$c_k = \frac{(k+\lambda-2)(k+\lambda-1)}{(k+\lambda-3)(k+\lambda+2)}\, c_{k-2}$$

for $\lambda_1 = -2 \Rightarrow c_k = \dfrac{(k-4)(k-3)}{k(k-5)}\, c_{k-2} \quad ; \; k \geq 2$

$k=2 \Rightarrow c_2 = -\frac{1}{3} c_0$

$k=3 \Rightarrow c_3 = 0 \quad , \quad k=4 \Rightarrow c_4 = 0$

$c_1 = 0 , \quad c_3 = 0 , \quad c_4 = 0 , \quad c_2 = -\frac{1}{3} c_0$

لدينا: $(k)(k-5)\, c_k = (k-4)(k-3)\, c_{k-2}$

$k=5 \Rightarrow (5)(0)c_5 = (1)(2)c_3$

$2c_3 = 0\, c_5 \Rightarrow 0 = 0\, c_5$

c_5 اختياري

$k=6 \Rightarrow c_6 = 0 \quad , k=7 \Rightarrow c_7 = \frac{6}{7} c_5$

لدينا ثابتين اختياريين c_0 , c_5

ومنه توصلنا إلى الحل العام دفعة واحدة بدلالة الثابتين الاختياريين c_0 و c_5

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k-2} = z^{-2}[c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots]$$

$$= \frac{1}{z^2}[c_0 - \frac{c_0}{3} z^2 + c_5 z^5 + \frac{6}{7} c_5 z^7 + \dots]$$

$$= \frac{1}{z^2}[c_0 (1 - \frac{1}{3} z^2) + c_5 (z^5 + \frac{6}{7} z^7 + \dots]$$

البحث في الحل العام للمعادلة التفاضلية في جوار اللانهاية:

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية: $w'' + a(z) w' + b(z) w = 0 \quad (1)$

لنوجد حلها العام في جوار اللانهاية.

ومن أجل ذلك نجري التحويل:

$$z = \frac{1}{t} \Rightarrow t = \frac{1}{z}$$

يتحول الجوار من ∞ إلى الصفر في t.

حساب المشتقات

$$w' = \frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dt} \cdot \frac{dt}{dz} = -t^2 \frac{dw}{dt}$$

$$w'' = \frac{d^2 w}{dz^2} = \frac{dw'}{dt} \cdot \frac{dt}{dz} = -t^2 \frac{dw'}{dt}$$

$$w'' = -t^2\left[-2t\frac{dw}{dt} - t^2\frac{d_2w}{dt^2}\right]$$

$$w'' = 2t^3\frac{dw}{dt} + t^4\frac{d_2w}{dt^2}$$

نعوض في المعادلة المفروضة:

$$\left(2t^3\frac{dw}{dt} + t^4\frac{d_2w}{dt^2}\right) + a\left(\frac{1}{t}\right)\left(-t^2\frac{dw}{dt}\right) + b\left(\frac{1}{t}\right)w = 0$$

$$\frac{d_2w}{dt^2} + \frac{2t - a\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}\frac{dw}{dt} + \frac{1}{t^4}\,b\left(\frac{1}{t}\right)w = 0 \qquad (2)$$

وهو أبسط شكل للمعادلة في t.

ننظر الآن في المقادير:

أمثال w $\quad \dfrac{2t - a\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2} \quad (3)$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{1}{t^4}\,b\left(\frac{1}{t}\right) \quad (4)$ أمثال w

نناقش الحالات:

إما: $\boxed{I}$ $\boxed{t=0 \text{ نقطة (عادية) نظامية}}$ كل من (3) و (4) تحليليان وبالتالي (3) و(4) يكتبان على شكل متسلسلة قوى.

$$\Rightarrow \frac{2t - a\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$$

$$\Rightarrow a\left(\frac{1}{t}\right) = 2t - a_0 t^2 - a_1 t^3 - a_2 t^4 - \cdots$$

$$a(z) = \frac{2}{z} - \frac{a_0}{z^2} - \frac{a_1}{z^3} - \frac{a_2}{z^4} - \cdots \qquad (5)$$

$$z \cdot a(z) \xrightarrow[z \to +\infty]{} 2 \qquad (6)$$

$$\frac{1}{t^4}\,b\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots$$

$$b\left(\frac{1}{t}\right) = b_0 t^4 + b_1 t^5 + b_2 t^6 + b_3 t^7 + \cdots$$

$$b(z) = \frac{b_0}{z^4} + \frac{b_1}{z^5} + \frac{b_2}{z^6} + \frac{b_3}{z^7} + \cdots \quad (7)$$

حتى تكون $t=0$ نقطة منتظمة يجب أن يتحقق.

$$z \cdot a(z) \xrightarrow[z \to +\infty]{} 2$$

وأن تكون موضع صفري بالنسبة لـ $a(z)$ وموضع من الدرجة الرابعة بالنسبة لـ $b(z)$

ويكون شكل الحل هو:

$w = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{c_k}{z^k}$ في جوار اللانهاية ، حيث اللانهاية هي صفر من المرتبة الأولى ، على الأقل بالنسبة لـ $a(z)$ وصفر من المرتبة الرابعة على الأقل بالنسبة لـ $b(z)$ ، (5) ، (6) ، (7) هي شروط النقطة المنتظمة (العادية)

$\boxed{2}$ $\boxed{t=0 \text{ شاذة منتظمة}}$

$t=0$ قطب بسيط على الأكثر بالنسبة للحد (3) عندئذٍ فإنّ (3) تكتب على الشكل.

$$\frac{2t - a\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2} = \frac{a_0}{t} + \text{تابع تحليلي}$$

$$= \frac{a_0}{t} + a_1 + a_2 t + a_3 t^2 + \cdots$$

$$a\left(\frac{1}{t}\right) = 2t - a_0 t - a_1 t^2 - a_2 t^3 - a_3 t^4 - \cdots$$

$$a\left(\frac{1}{t}\right) = (2 - a_0) t - a_1 t^2 - a_2 t^3 - a_3 t^4 - \cdots$$

$$a\left(\frac{1}{t}\right) = \bar{a}_0 t - a_1 t^2 - a_2 t^3 - a_3 t^4 - \cdots$$

$$(8) \quad a(z) = \frac{\bar{a}_0}{z} + \frac{\bar{a}_1}{z^2} + \frac{\bar{a}_2}{z^3} + \frac{\bar{a}_3}{z^4} + \cdots ; \quad \bar{a}_i = -a_i \ , \ i = 1, \cdots$$

$t=0$ قطب مضاعف على الأكثر بالنسبة للحد (4) عندئذٍ فإن (4) تكتب بالشكل:

$$\frac{1}{t^4}\, b\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{b_0}{t^2} + \frac{b_1}{t} + \text{تابع تحليلي}$$

$$= \frac{b_0}{t^2} + \frac{b_1}{t} + b_2 + b_3 t + b_4 t^2 + b_5 t^3 + \cdots$$

$$b(z) = \frac{b_0}{z^2} + \frac{b_1}{z^3} + \frac{b_2}{z^4} + \frac{b_3}{z^5} + \cdots \quad (9)$$

كي تكون ∞ نقطة شاذة منتظمة يجب أن تكون صفر مرتبة أولى على الأقل لـ $a(z)$ وصفر مرتبة ثانية على الأقل لـ $b(z)$ ويكون شكل الحل.

$$w = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k\, t^{k+\lambda} = \frac{1}{z^\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{c_k}{z^k}$$

في جوار اللانهاية والتي هي نقطة شاذة منتظمة.

مثال:

ما هي النقاط الشاذة للمعادلة التالية وما طبيعة كل منها؟

$$w'' + \frac{2(z+2)}{z(z-2)}\, w' + \frac{5}{z^2(z-2)^2}\, w_2 = 0$$

الحل:

$z = 2$ ، $z = 0$ شاذة منتظمة

نلاحظ أن $z \cdot a(z) \longrightarrow 2$ عندما $z \longrightarrow +\infty$

$z = \infty$ عادية حيث أن الشروط محققة (5) و (6) و (7)

في $a(z)$ ، البسط درجة أولى والمقام درجة ثانية الفرق بينهما (1) فهي صفر من المرتبة الأولى لـ $a(z)$

في $b(z)$ ، البسط درجة صفر والمقام درجة رابعة والفرق بينهما (4) فهي

صفر رتبة رابعة لـ $b(z)$

$$z^2(z-2)w'' + az(z^2-4)w' + (z-1)w = 0$$

ما هي النقاط الشاذة والطبيعية لهذه المعادلة؟ حيث a ثابت كيفي

الحل: $z=0$ ، $z=2$ شاذة منتظمة

في $a(z)$ البسط درجة (1) والمقام درجة (1) ما يعني صفر (0) ، في $b(z)$ البسط درجة (1) والمقام (3) يعني (2)

$z=\infty$ شاذة غير منتظمة حيث أنها صفر درجة ثانية على الأقل في $b(z)$

ولكن ليست صفر درجة أولى على الأقل في $a(z)$

مثال:

ابحث في الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية

$$(1-z^2)w'' - 2zw' + 6w = 0$$

في جوار ∞.

الحل

نجري التحويل: $z = \frac{1}{t}$ ، نحسب المشتقات

$$w' = -t^2\frac{dw}{dt} \quad , \quad w'' = 2t^3\frac{dw}{dt} + t^4\frac{d^2w}{dt^2}$$

نعوض في المعادلة المفروضة:

بالتعويض والإصلاح نحصل على:

$$t^2(t^2-1)\frac{d^2w}{dt^2} + 2t^3\frac{dw}{dt} + 6w = 0$$

وهي أبسط شكل للمعادلة الجديدة في t ، أصبحت مسألتنا هي البحث عن الحل العام في جوار $t=0$ نقطة شاذة منتظمة.

وتتمة الحل هو نفسه مثال لوطيفة (المحلول) في محاضرة سابقة.

أو يمكن حله بأسلوب آخر:

نبحث عن حل من الشكل:

$$w = \frac{1}{z^{\lambda}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{c_k}{z^k}$$

$$w = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \, z^{-(k+\lambda)}$$

ولكن هذا الأسلوب أصعب.

انتهت المحاضرة ...