المحاضرة العاشرة ١٣/٤/٢٠١٥م

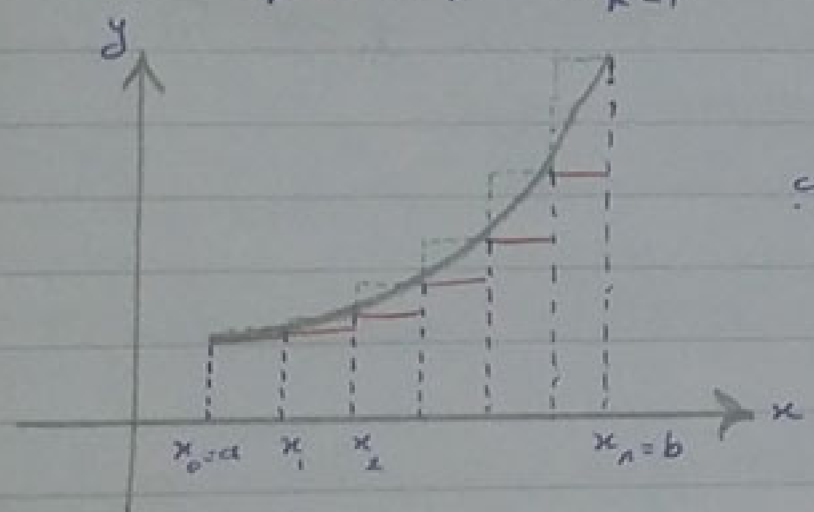
تكامل ستيلجس

تمهيد: تكامل ريمان

إذا كانت الدالة f معرفة ومحدودة على $[a,b]$ ولتكن P تجزئة للمجال $[a,b]$
بحيث $P=\{x_0=a<x_1<\dots<x_n=b\}$

فإن مجموع ريمان يعطى بالعلاقة $S(f,P)=\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\cdot\Delta x_k$

حيث $t_k\in[x_{k-1},x_k]$ ؛ $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$



$\Delta x = \max_{1\le k\le n}(\Delta x_k)$

عندما $\Delta x \longrightarrow 0$ فإن مجموع ريمان يتقارب من $\int_a^b f\,dx$ أي

$$\lim_{\Delta x\to 0} S(f,P) = (R)\int_a^b f(x)\,dx$$

هذا الرمز يعني ان التكامل هو تكامل ريمان

تمارين:

احسب التكاملات التالية باستخدام تعريف مجموع ريمان:

$I_1=\int_0^3 x^2\,dx$ $\qquad I_2=\int_0^3 (x^2+1)\,dx$ $\qquad I_3=\int_0^2 (x+1)\,dx$

$I_{11}=\int_1^3 x^2\,dx$ $\qquad I_{22}=\int_1^3 (x^2+1)\,dx$ $\qquad I_{33}=\int_1^2 (x+1)\,dx$

تذكرة بمبرهنة القيمة الوسطى: f دالة معرفة على $[a,b]$ ؛ $c\in]a,b[$ فإن

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

/ /

تعريف آخر مكافئ لتعريف ريمان:

① $\forall \varepsilon>0 ; \exists P_\varepsilon : P_\varepsilon \subset P \Rightarrow |S(f,P) - A| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta P \to 0} S(f,P) = A = \int_a^b f\,dx$$

② $\forall \varepsilon>0 , \exists \delta(\varepsilon)>0 : \max(x_k - x_{k-1}) < \delta(\varepsilon)$

$$\Rightarrow |S(f,P) - A| < \varepsilon$$

- تكامل استيلجس:

إذا كانت الدالتان $g(x)$ و $f(x)$ معرفتين ومحدودتين على $[a,b]$ و P تجزئة للمجال $[a,b]$ بحيث $P=\{x_0=a<x_1<\dots<x_n=b\}$

نعرف مجموع استيلجس للدالة f بالنسبة لـ g:

$$S(f,g,P) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\cdot(g(x_k) - g(x_{k-1}))$$

$$S(f,g,P) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta g_k$$

بحيث $\Delta g_k = g(x_k) - g(x_{k-1})$ و $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$

$$\Rightarrow (S)\int_a^b f\,dg = \lim_{\Delta x \to 0} S(f,g,P) \; ; \; \Delta x = \max_{1\le k\le n}(x_k - x_{k-1})$$

هذا الرمز يعني أن التكامل هو تكامل استيلجس

ملاحظة: قد تكتب Δx في بعض المراجع ΔP أو $\lambda(P)$

أي $\lambda(P) \equiv \Delta P \equiv \Delta x$

انتهت المحاضرة...