25/5/2015 د. حمزة ماكينه /7/ المحاضرة /14/

الترابط: تعميم لفكرة الجزء الملاصق

$\boxed{\begin{array}{l} K \cap N = \circ \\ K \cup N = V \end{array}}$

## الترابط

تعريف: ليكن $(X,d)$ فضاءاً متريساً نقول عن $X$ إنه مترابط إذا لم نوجد مجموعات مفتوحة $A, B$ في $X$ تحقق

$$A \cap B = \phi$$

$$A \cup B = X$$

ونقول عن المجموعة الجزئية $Y \subset X$ إنها مترابطة إذا كان الفضاء الجزئي $(Y, d)$ مترابطاً.

$\phi \neq A, B$

---

مثال:

الفضاء المؤلف من عنصر واحد مترابط.

المجموعة الوحيدة العنصر مجموعة مترابطة.

---

شرط كافي لمعرفة الترابط

مبرهنة/ نقول في فضاء متري $(X,d)$ الشروط الآتية متكافئة:

1. الفضاء $X$ مترابط

2. إذا كانت $A$ مجموعة مغلقة ومفتوحة في $X$ بآن واحد عندئذ: إما $A = X$ أو $A = \phi$

الفضاء الترابط $X$ $\phi$ الخالي المجموعة الوحيدة المغلقة والمفتوحة بالوقت

البرهان:

① ← ② لنفرض أن الفضاء $X$ مترابط، ولتكن $A$ مجموعة مغلقة ومفتوحة في $X$ ولكن $A \neq X$ و $A \neq \phi$

عندئذ $X \setminus A$ تكون مفتوحة في $X$ ولكنها

$$(X \setminus A) \cap A = \phi$$

$A \neq X$

$\Rightarrow A \setminus X \neq \phi$

$$(X \setminus A) \cup A = X$$

وهذا يناقض كون الفضاء X مترابط

② ⇐ ① لنفرض جدلاً أن X غير مترابط عندئذٍ توجد مجموعات مفتوحة $A, B$

$$A \cap B = \phi$$

$$A \cup B = X$$

نلاحظ أن $A = X \setminus B$ (لأن B مفتوحة)

وأن $X \setminus B$ مغلقة ،

$A \neq \phi$ ، $A \neq X$

لأن $B \neq \phi$

وهذا يناقض فرضنا بأن الفضاء X مترابط.

[illegible]

---

**مبرهنة/** ليكن $(X, d)$ فضاءً متريًا ولتكن $Y \subset X$ مجموعة جزئية ولتكن A مجموعة جزئية في الفضاء الجزئي $(Y, d)$ عندئذٍ:

① A مفتوحة في Y $\Longleftrightarrow$ توجد مجموعة مفتوحة H في X حيث $A = Y \cap H$

② A مغلقة في Y $\Longleftrightarrow$ توجد مجموعة مغلقة K في X تحقق $A = Y \cap K$

المجموعات المفتوحة في الفضاء الجزئي هي تقاطع الفضاء الجزئي مع المجموعات المفتوحة في X

البرهان:

① ⇐ لنفرض أن A مفتوحة في Y ، عندئذٍ تكون A مجموعة مفتوحة في X ومنه

$$A = Y \cap A$$

$A \subset Y \subset X$

[illegible] مفتوحة في X

من تكون العلاقة
$K \subseteq A \cup B$

$K \cap (A \cup B) = K$
$(K \cap A) \cup (K \cap B) = K$

$\Leftarrow$ لنفرض أن $A = Y \cap H$ حيث $H$ مجموعة مفتوحة في $X$

$\forall a \in A \quad ; a \in H \quad \exists \varepsilon > 0$

$N(a,\varepsilon) \subseteq H$

من التعريف $\quad N(a,\varepsilon) \subseteq Y$

$N(a,\varepsilon) \subseteq Y \cap H = A$

ومنه $A$ مفتوح في $Y$

② وظيفة ، استخدام التعميم وبالانتقال (1)

---

تعريف: ليكن $(X,d)$ فضاء متري و $Y$ مجموعة جزئية في $X$ و $K \subset Y$ مجموعة جزئية في $Y$ ، نقول أن $K$ غير مترابطة في $Y$ إذا وجدت مجموعات مفتوحة غير خالية في $Y$

$\phi \neq K \cap A \quad , \quad K \cap B \neq \phi$

علماً أن $K \neq \phi$

$(K \cap A) \cap (K \cap B) = \phi$

$(K \cap A) \cup (K \cap B) = K$

أي $\quad K \cap A \cap B = \phi$

$K \subseteq A \cup B$

التقاطع للتركيز

---

/ مبرهنة / ليكن $f : X \longrightarrow Y$ تابع بين فضائيين متريين إذا كان $f$ مستمراً وكان $X$ مترابطاً فإن المجموعة $f(X)$ مترابطة في $Y$

البرهان: لنفرض أن $f(X)$ غير ترابطي في $Y$ ، عندئذ توجد في $Y$ مجموعات مفتوحة غير خالية ولتكن $A,B$ تحقق أنه

$$f(X)\cap A\neq\phi \qquad , \qquad f(X)\cap B\neq\phi$$

$$f(X)\cap A\cap B=\phi$$

$$f(X)\subseteq A\cup B$$

علماً أن $f$ مستمرة فإن

$f^{-1}(A)$ ، $f^{-1}(B)$ مجموعات مفتوحة في $X$

علماً أن $f(X)\cap A\neq\phi$ يوجد

$$a\in f(X)\cap A$$

$$a\in f(X) \implies \exists\, b\in X$$

$$a=f(b)$$

$$f(b)=a\in A$$

$$b\in f^{-1}(A)$$

ومنه $f^{-1}(A)\neq\phi$ كذلك $f^{-1}(B)\neq\phi$ وهما مجموعات مفتوحة غير خالية

لنفرض جدلاً أن

$f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)\neq\phi$ عندئذ يوجد

$$\boxed{f(x)\cap A\cap B=\phi}$$

سنناقضه

$$a\in f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$$

$$a\in f^{-1}(A)\ ;\quad f(a)\in A$$

$$a\in f^{-1}(B)\ ;\quad f(a)\in B$$

يحقق الشروط الثلاثة

$$a\in X\ ;\quad f(a)\in f(X)$$

العنصر الثالث

وهذا يعني أن

$f(X)\cap A\cap B\neq\phi$ وهذا تناقض. إذاً

$$\boxed{f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \phi}$$

علمًا $f(X) \subseteq A \cup B$ عندئذٍ

$\forall x \in X \quad ; f(x) \in A \cup B$

$f(x) \in A \Rightarrow x \in f^{-1}(A)$

$f(x) \in B \Rightarrow x \in f^{-1}(B)$

$\forall x \in X \quad ; \quad x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

$$X \subseteq f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subseteq X$$

$$\boxed{X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)}$$

وهذا يعني أن $X$ غير مترابط وهذا يناقض الفرض إذ أن $f(X)$ مجموعة مترابطة في $Y$

---

نتيجة/ الصورة المباشرة لأي مجموعة مترابطة وفق تابع مستمر هي مجموعة مترابطة.

---

مبرهنة/ لتكن $(X,d)$ فضاءً متريًا و $H, K$ مجموعات جزئية من $X$ إذا كانت $H$ مترابطة وكانت

$$H \subseteq K \subseteq cl(H)$$

عندئذٍ تكون $K$ مترابطة.

البرهان: لنفرض جدلًا أنه $K$ غير مترابطة عندئذٍ توجد في $X$ مجموعتان مفتوحتان غير خالية $A, B$ تحقق

$$K \cap A \neq \phi \quad , \quad K \cap B \neq \phi$$

$$K \cap A \cap B = \phi$$

$$K \subseteq A \cup B$$

$H\cap A \subseteq K\cap A$ لأن $H\subset K$ وبما أن

وبما أن $K\cap A \neq \phi$ يوجد $b\in K\cap A$ $b\neq 0$ الكرة

$b\in K,\ K\subseteq cl(H)$

فإن $b\in cl(H)$

$\forall \varepsilon>0\ ;\quad N(b,\varepsilon)\cap H \neq \phi$

ومنه فإن $b\in H$.

وبالتالي $H\cap A \neq \phi$

وبطريقة مشابهة نجد أن $H\cap B \neq \phi$

وأن $H\cap A\cap B = \phi$ لأن $H\subseteq K$

$K\cap A\cap B=\phi$

$H \subseteq A\cup B$

وهذا يعني أن المجموعة H غير مترابطة، وهذا يناقض الفرض إذاً أن K مترابطة.

---

تعميم لفكرة الفترة

(سؤال) لتكن $(\mathbb{R},d)$ فضاء متري ←المسافة المألوفة، A مجموعة جزئية في X مترابطة.

عندئذٍ $\forall x,y\in A$ حيث $x<y$ علاقة الترتيب المألوفة

فإنه أيا كان $Z\in R$ حيث $\boxed{x<Z<y}$ مكان انحصاره بين الحدود

فإن $Z\in A$

البرهان:

لنفرض جدلاً أنه يوجد $Z\in\mathbb{R}$ حيث $x<Z<y$ وأنه

$Z\notin A$

لنأخذ المجموعات

$K=]-\infty,Z[$

$H=]Z,+\infty[$

والتي كل منها مجموعة مفتوحة غير خالية في $R$

$A \cap K \cap H = \phi$

$A \subset K \cup H$ $\qquad$ $Z \notin A \Rightarrow A \subset K \cup H$

في $R \setminus Z$

وهذا يعني ان المجموعة $A$ غير مترابطة،

الذي يناقض الفرض، وبالتالي $Z \in A$.

في الفضاء $R$ المجموعات المترابطة هي

فقط الفترات التي تحتوي أي نقطتين منها

تحتوي الفترة بينهما في الفضاء الحقيقي

---

اثبات أن $R$ مترابط

تمرين: الفضاء $R$ مترابط

نفرض جدلاً أن $R$ فضاء غير مترابط

عندئذ $\phi \neq A \subsetneq R$ حيث أن $A$ مجموعة مغلقة ومفتوحة

آن واحد في $R$

وبما أن $A$ مجموعة مفتوحة فإن

$A = ]a, b[ \quad ; a, b \in R$

أو $A = ]-\infty, +\infty[$

أو $A = ]b, \infty[$

وهذا يعني أن $A$ في كل الإمكانات السابقة غير مغلقة

وهذا تناقض لأنه لا يوجد مجموعة

مغلقة ومفتوحة في آن واحد

في $R$ مترابط

لا يمكن أن تكون مجموعة مفتوحة ومغلقة في آن واحد

# انتهت

ومع الله الفترة الأخيرة