[1] لتكن: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \sin x + \sin y - \sin(x+y)$$

حدد نقاط القيم العظمى النسبية داخل المثلث المحدد بالمحورين الإحداثيين ox , oy والمستقيم الذي معادلته $x+y=2\pi$

الحل:

$$f_x(x,y) = \cos x - \cos(x+y)$$

$$f_y(x,y) = \cos y - \cos(x+y)$$

$$f_x(x,y) = 0 \quad , \quad f_y(x,y) = 0$$

$$\cos x - \cos(x+y) = 0$$

$$\cos y - \cos(x+y) = 0$$

$$\cos x = \cos(x+y) \Rightarrow x+y = \begin{cases} x + 2\pi k & (1 \\ -x + 2\pi k & (2 \end{cases}$$

$$\cos y = \cos(x+y) \Rightarrow x+y = \begin{cases} y + 2\pi k & (3 \\ -y + 2\pi k & (4 \end{cases}$$

من أجل 1) $x+y = x+2\pi k \Rightarrow y = 2\pi k$ لا يوجد نقاط تقع في المثلث

من أجل 2) $x+y = -x+2\pi k \Rightarrow y = -2x+2\pi k \Rightarrow y+2x = 2\pi k$

سنأخذ حالة $k=1$ تقع داخل المثلث بشرط x بين الصفر و π

$0 < x \leq \pi$ $\boxed{2x+y=2\pi}$ *

((يوجد نقاط واقعة داخل المثلث))

أما من أجل $k \neq 1$ ((لا يوجد نقاط تقع داخل المثلث))

من أجل 3) $x = 2\pi k$ توازي مستقيمات oy

فلا يوجد نقاط تقع داخل المثلث.

تابع الحل (4) $\quad y+x=-y+2\pi k \Rightarrow 2y+x=2\pi k$

من أجل $k=1 \Leftarrow$ $\boxed{2y+x=2\pi}$ ** توجد نقاط تقع داخل

المثلث شرط $0<y\le\pi$

أما من أجل $k\neq 1$ فلا يوجد نقاط تقع داخل المثلث

نحل المعادلتين * و **

$$\left.\begin{aligned} y+2x&=2\pi \\ 2y+x&=2\pi \end{aligned}\right\} \text{ بالطرح } 2$$

$$-y+x=0 \Rightarrow x=y$$

نعوض في إحدى المعادلتين:

$$3x=2\pi \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2\pi}{3} \\ y=\dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$$

نقطة حرجة $\left(\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right)$

$$f_{xx}(x,y)=-\sin x+\sin(x+y) \Rightarrow f_{xx}\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt3}{2}-\frac{\sqrt3}{2}=-\sqrt3$$

$$f_{xx}\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)=-\sqrt3<0$$

$$f_{yy}(x,y)=-\sin y+\sin(x+y)$$

$$\Rightarrow f_{yy}\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)=-\sqrt3$$

$$f_{xy}(x,y)=\sin(x+y) \Rightarrow f_{xy}\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)=f_{yx}\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{-\sqrt3}{2}$$

$$f_{yx}(x,y)=\sin(x+y)$$

$$\Rightarrow \Delta=\begin{vmatrix} -\dfrac{\sqrt3}{2} & -\sqrt3 \\ -\sqrt3 & \dfrac{-\sqrt3}{2} \end{vmatrix}=\frac{3}{4}-3=\frac{-9}{4}<0$$

بما أن $f_{xx}<0$ و $\Delta<0$

ومنه $\left(\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right)$ عظمى نسبية

2] حدد نقاط القيم القصوى النسبية للدالة :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = e^{x^2+y^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f_x(x,y) = 2x\,e^{x^2+y^2} = 0 \\ f_y(x,y) = 2y\,e^{x^2+y^2} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0 \,,\ y = 0$$

نقطة حرجة $(x,y) = (0,0)$

$$f_{xx}(x,y) = 2e^{x^2+y^2} + 4x^2 e^{x^2+y^2}$$

$$f_{yy}(x,y) = 2e^{x^2+y^2} + 4y^2 e^{x^2+y^2}$$

$$f_{xy}(x,y) = 4xy\,e^{x^2+y^2} = f_{yx}(x,y)$$

$$f_{xx}(0,0) = 2 = f_{yy}(0,0) \quad , \quad f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0) = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

$$f_{xx} = 2 > 0$$

ومنه $(0,0)$ صغرى نسبية

$$x^2+y^2 > 0 \Rightarrow e^{x^2+y^2} > e^0 = 1$$

$$f(x,y) = e^{x^2+y^2} > f(0,0)$$

$\forall x,y$ $(0,0)$ صغرى ~~نسبية~~ مطلقة

3] مثل العدد الموجب a لا بشكل جداء ثلاثة أعداد موجبة بحيث يكون مجموع هذه الأعداد أصغر ما يمكن

الحل :

$$a = x \cdot y \cdot z \Rightarrow z = \frac{a}{x \cdot y}$$

$$f(x,y) = x + y + \frac{a}{x \cdot y}$$

$$f_x(x,y) = 1 - \frac{a}{yx^2} = 0$$

(نجعلها تساوي الصفر لايجاد النقط الحرجة)

$$f_y = 1 - \frac{a}{xy^2} = 0$$

$$1 - \frac{a}{xy^2} = 0 \Rightarrow a = xy^2$$

$$1 - \frac{a}{x^2y} = 0 \Rightarrow a = x^2y$$

$$\Rightarrow 0 = xy(y - x) \Rightarrow y = x$$

$$\Rightarrow a = x^3 \Rightarrow x = y = \sqrt[3]{a}$$

$(\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a})$ نقطة حرجة

$$f_{xx}(x,y) = \frac{2a}{yx^3} \Rightarrow f_{xx}(\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a}) = \frac{2}{\sqrt[3]{a}}$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{+2a}{xy^2} \Rightarrow f_{yy}(\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a}) = \frac{2}{\sqrt[3]{a}}$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{a}{x^2y^2} \Rightarrow f_{xy}(\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a}) = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$$

$$f_{yx}(x,y) = \frac{a}{x^3y^2} \Rightarrow f_{yx}(\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a}) = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt[3]{a}} & \frac{2}{\sqrt[3]{a}} \\ \frac{2}{\sqrt[3]{a}} & \frac{1}{\sqrt[3]{a}} \end{vmatrix} = \frac{-3}{\sqrt[3]{a^2}} < 0 \quad , f_{xx} > 0$$

$(\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a})$ صغرى نسبية

4

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$$

أوجد النقاط الحرجة لهذه الدالة وادرس إمكان كون كل منها نقطة قيمة قصوى نسبية لدالة معطاة

الحل:

$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y) &= 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ f_y(x,y) &= 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{aligned}\right\} \text{نجمع}$$

$$4x^3 + 4y^3 = 0$$

$$x^3 + y^3 = 0$$

$$(x-y)(x^2 - xy + y^2) = 0 \Rightarrow x = -y$$

نعوضها بإحدى المعادلتين

$$4x^3 - 8x = 0 \Rightarrow x(x^2-2) = 0$$

$$x = 0 \quad , \quad x^2 = 2 \Rightarrow x = \mp\sqrt{2}$$

أصبح لدينا ثلاث نقاط حرجة: $(0,0)$ ، $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ، $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

$$f_{xx}(x,y) = 12x^2 - 4 \Rightarrow f_{xx}(0,0) = -4$$

$$f_{yy}(x,y) = 12y^2 - 4 \Rightarrow f_{yy}(0,0) = -4$$

$$f_{xy}(x,y) = 4 = f(y,x)$$

$$f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0) = 4$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

بما أن $\Delta = 0$ نلجأ للجوارات.

نأخذ الجوار $N((0,0), \delta)$

نأخذ نقطتين تنتمي له $\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right) \in N((0,0), \delta)$

$$f\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right) = \frac{\delta^4}{16} + \frac{\delta^4}{16} - \frac{2\delta^2}{4} + 4\frac{\delta^2}{4} - \frac{2\delta^2}{4}$$

$$= \frac{2\delta^2}{16} = \frac{2\delta^4}{8} > 0 = f(0,0)$$

إذن $(0,0)$ ليست قصوى

نأخذ النقطة $(\alpha, 0) \in N((0,0), \delta)$

$(\alpha, 0) \in N((0,0), \delta)$

$$f(\alpha, 0) = \alpha^4 - 2\alpha^2 = \alpha^2(\alpha^2 - 2) < 0 = f(0,0)$$

$\alpha^2 > 0$

يوجد but $\alpha^2 - 2 < 0 \Rightarrow \alpha < \sqrt{2}$

أرسول فوق $\alpha < \min(\sqrt{2}, \delta)$

أخذناها موجبة فنحصل سالبة

~~فإن (0,0) ليست قصوى~~

آ: إذا $f_{xx} > 0$ $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 20 \\ 20 & 4 \end{vmatrix} < 0$: Δ شـ

$(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ صغرى نسبية

$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ " "