المحاضرة 6 . الطوبولوجيا العامة

1- تعريف الطوبولوجيا / الفضاء الطوبولوجي (X, τ)

2- طوبولوجيا زارسكي.

3- إذا كانت τ_i ($i\in I$) طوبولوجيا على X $\Leftarrow$ $\bigcap_{i\in I} \tau_i$ طوبولوجيا على X

4- x نقطة داخلية لـ A : A°

$\exists B\in\tau : x\in B\subseteq A$

مجموعة مفتوحة (جوار)

5) x نقطة تجمع لـ A : A'

$\forall B\in\tau : x\in B \Rightarrow B\cap A\setminus\{x\}\neq\emptyset$

6- A مجموعة مغلقة $\Leftrightarrow$ A^c مفتوحة

7- لصاقة المجموعة A هي $\bar{A}$: أصغر مجموعة مغلقة تحوي A

أو (تقاطع جميع المجموعات المغلقة التي تحوي A)

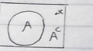
8- A مجموعة كثيفة في فضاء الطوبولوجي (X, τ)

(إذا كانت لصاقة A تساوي الفضاء الطوبولوجي X)

المثال الشهير $\bar{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$

9- خارج المجموعة A : $ext(A) = (A^c)^\circ$

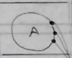
x نقطة خارجية لـ A $\Leftrightarrow$ x نقطة داخلية في A^c



10- x نقطة حدية لـ A $\Leftrightarrow$ $\forall B\in\tau : x\in B$

$B\cap A\neq\emptyset \ , B\cap A^c\neq\emptyset$, $b(A)=\bar{A}\setminus A^\circ$

(أي نقطة حدية لو أخذنا مجموعة مفتوحة تحوي هذه النقطة سوف تقاطع A^c وتقاطع A))

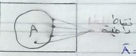


نقاط محيطية

- في $\mathbb{R}^2$ A ستكون قرص مفتوح مثل النقاط المحيطية لا تنتمي له
أي نقطة خارجه عنه تكون خارجية

- نقطة التجمع: كل نقطة داخلية هي نقطة تجمع بالاضافة للنقاط المحيطة

- اللصاقة بالتعريف في $\mathbb{R}$ عندما نأخذ المجال $]a,b[$ نجد $[a,b]$



اللصاقة = المجموعة A مع نقاط التجمع ← $\bar{A} = A \cup A'$

الكثيفة: إذا أخذنا أصغر مجموعة مغلقة تحوي A تمثل كامل طوبولوجيا

- خارج المجموعة: هو داخل مجموعة المتمم

تمرين: إذا كانت $X = \{a, b, c, d, e\}$ وكانت τ صفا من أجزاء X حيث

$$\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

1) أثبت أن τ تمثل طوبولوجيا على X

2) حدد المجموعات المفتوحة في هذه الطوبولوجيا

3) حدد المجموعات المغلقة في هذه الطوبولوجيا

4) ماهي النقاط الداخلية لكل من المجموعات التالية:

$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{a, b\}, \{b, c\}$

$\{a, c\}, \{d, e\}, \{b, c, d, e\}$

5) أوجد نقاط التجمع لـ $A = \{c, d, e\}$

6) حدد لصاقة $\{a\}$ ، $\{a, b\}$

7) هل $\{a, b\}$ كثيفة في X ، هل $\{a\}$ كثيفة في X

8) حدد النقاط الخارجية من $A = \{b, c\}$

$A=\{a,b\}$ ماهي النقاط المحيطية لـ (9

الحل: 1) نكتب الشروط اللازمة:

$$\underbrace{\text{أ) } \emptyset \in \tau \quad , \text{ ب) } X \in \tau}_{\text{محققة}}$$

$\forall A, B \in \tau \Rightarrow A \cup B \in \tau$ (ج

لنرى هل هي محققة: نرسم الجدول

	$\emptyset$	X	$\{a\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	X	$\{a\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$
X	X	X	X	X	X
$\{a\}$	$\{a\}$	X	$\{a\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$
$\{b,c\}$	$\{b,c\}$	X	$\{a,b,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$
$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	X	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$

$\in \tau$

الاجتماع محقق وأيضا التقاطع محقق حسب الجدول

إذا: إن τ تحل طبولوجيا لأنها تحقق الشروط الـ 4

2 - عناصر τ هي مجموعات مفتوحة

3) نأخذ المتمم لـ τ

$\emptyset^c = X \quad , X^c = \emptyset \quad , \{a\}^c = \underbrace{\{b,c,d,e\}}_{\text{ليست في } \tau}$

$\{b, c\}^c = \underbrace{\{a, d, e\}}_{\text{لصانة هي نوع}} \quad , \quad \{a, b, c\}^c = \underbrace{\{d, e\}}_{\text{لصانة هي نوع}}$

((الصانة أي مجموعة مغلقة هي نوع)) وبالتالي هي تحوي نقاط تجمع.

---

4) النقاط الداخلية : لنرى هل $A = \{a\}$ هي نقطة داخلية ؟
بناءاً على التعريف :

أولاً يجب أن أجد مجموعة مفتوحة محتواة في A
ومنه $\{a\}$ نقطة داخلية لـ A

$\exists \{a\} \in \tau \; : a \in \{a\} \subseteq \{a\}$

حيث $\{a\}^\circ = \{a\}$

طريقة ثانية : بما أن $\{a\}$ مجموعة مفتوحة فعندما نضع رمز الدائرة
كل المجموعة المفتوحة فتبقى نفسها

- لنرى هل $\{b\}$ داخلية ؟
لا توجد نقاط داخلية لـ $\{b\}$ حيث $\{b\}^\circ = \varnothing$
السبب : إن b ليست مفتوحة فلا يمكن للعرفة بسهولة
نقاطها الداخلية لذا نلجأ للتعريف فلا ينطبق عليها التعريف
وأيضاً كلاً من $\{c\}^\circ = \varnothing$ و $\{d\}^\circ$ و $\{e\}^\circ$

- لنرى ما هي النقاط الداخلية لـ $\{b, c, d, e\}$
أولاً هي ليست مجموعة مفتوحة يجب أن ادرس كل عناصر
عناصر ها على حدا

نفرض: $A^{\circ} = \{b, c\} \iff A = \{b, c, d, e\}$

لنتأكد: حيث A° هي أكبر مجموعة تحوي A

نأخذ a: نضع المجموعات المفتوحة التي تحوي a و التي هي:

$\{a\}$, X , $\{a, b, c\}$

هل يا ترى يوجد مجموعة مفتوحة ينتمي لها a ومحتواة في A ((يكفي واحدة على الأقل محتواة في A))

لا يوجد حيث مثلا:

$a \in \{a\} \not\subseteq \{b, c, d, e\}$, $a \in \{a, b, c\} \not\subseteq A$

$a \in X \not\subseteq \{b, c, d, e\}$

إذن a ليست نقطة داخلية لـ A

نأخذ b: نضع المجموعات المفتوحة التي تحوي b والتي هي:

X , $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$

هل يا ترى يوجد مجموعة مفتوحة ينتمي لها b ومحتواة في A

نعم يوجد مثلا: $b \in \{b, c\} \subseteq A$, $b \in X \not\subseteq A$

$b \in \{a, b, c\} \not\subseteq A$

يكفي مجموعة واحدة على الأقل محتواة في A لنقول عن العنصر انه نقطة داخلية

إذن b نقطة داخلية لـ A

و c ايضا نقطة داخلية لـ A

نأخذ d: نضع المجموعات المفتوحة التي تحوي d وهي X

لكن $d \in X \not\subseteq A$

إن b ليست داخلية في A وأيضاً e

إذاً الفرض صحيح.

- لنرى هل يوجد ل {a,b} نقاط داخلية. لنأخذ أكبر مجموعة تحوي {a,b} وهي {a}

$A=\{a,b\} \Longrightarrow \{a\} = A^{\circ}$

لنتأكد:

نأخذ a: نضع المجموعات المفتوحة التي تحوي a هي:

$X \;,\; \{a\} \;,\; \{a,b,c\}$

$a \in X \not\subseteq A \quad , \quad a \in \{a\} \subseteq A \quad , \quad a \in \{a,b,c\} \subseteq A$

إذاً a هي نقطة داخلية ل A

نأخذ b: نضع المجموعات المفتوحة التي تحوي b:

$X \;,\; \{b,c\} \;,\; \{a,b,c\}$

$b \in X \not\subseteq A \quad , \quad b \in \{b,c\} \not\subseteq A \quad , \quad b \in \{a,b,c\} \not\subseteq A$

b ليست نقطة داخلية ل A، وكذلك الكلام بالنسبة ل c و d و e

---

5) - إيجاد نقاط تجمع ل $A=\{c,d,e\}$

نطبق التعريف: لكن هنا التعريف ليس كتعريف النقطة الداخلية ((هنا من أجل كل المجموعات المفتوحة التي تحوي عنصر ما))

الحل: نرى أنه لا توجد مجموعة تحوي A لذلك نكتب

نفرض أن: $A=\{c,d,e\}' = \emptyset$

للتأكد:

نأخذ a: نضع المجموعات المفتوحة التي تحوي a

$B = \{ X \;,\; \{a\} \;,\; \{a,b,c\} \}$

لكي تكون a نقطة تجمع يجب أن نحقق الشرط

$$B \cap A \setminus \{a\} \neq \emptyset$$

لدينا: بالنسبة لـ X الكلام صحيح

$$X \cap \{c, d, e\} \neq \emptyset$$

$$\{a\} \cap \{c, d, e\} = \emptyset$$ اختل الشرط

ومنه a ليست نقطة تجمع

لنأخذ b: نضع المجموعات المفتوحة التي تحوي b

$$B = \{X, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

$$X \cap \{c, d, e\} \neq \emptyset$$

$$\{b, c\} \cap \{c, d, e\} \neq \emptyset$$

$$\{a, b, c\} \cap \{c, d, e\} \neq \emptyset$$

ومنه b هي نقطة تجمع فالفرض خاطئ

لنأخذ c: المجموعات المفتوحة التي تحويه

$$X = \{X, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

$$\cancel{X} \cap \underbrace{\{d, e\}}_{\text{حذفنا ال c}} \neq \emptyset \qquad ((X \cap A \setminus \{c\}))$$

$$\{b, c\} \cap \{d, e\} = \emptyset$$ اختل الشرط

إذن c ليست نقطة تجمع

نأخذ d: المجموعات المفتوحة التي تحويه:

$$B = \{X\}$$

$$X \cap \underbrace{\{c, e\}}_{\text{حذفنا ال d}} \neq \emptyset$$

إذن d نقطة تجمع وأيضا e

$$A = \{c, d, e\}' = \{d, b, e\}$$

((يأتي سؤال على المنع كذا هو نقطة تجمع))

ذ. ماشان

6) لدينا المجموعات المغلقة :

$\{d,e\}, X, \emptyset, \{b,c,d,e\}, \{a,d,e\}$

1) $\overline{\{a\}}$ ؟ إذن أصغر مجموعة مغلقة تحوي a هي

$$\overline{\{a\}} = \{a,d,e\}$$

2) $$\overline{\{a,b\}} = X$$

---

7) لأن $\{a,b\}$ هي كثيفة لأن لصاقتها تساوي X

بينما $\{a\}$ ليست كثيفة لأن لصاقتها $\neq X$

---

8) تحديد النقاط الخارجية لـ $A=\{b,c\}$

((تكون خارجية إذا كانت داخلية في متممتها))

نأخذ متممة A وهي

$$A^c = \{a,d,e\}$$

نعود لفكرة النقطة الداخلية . هل هناك مجموعة مفتوحة تحوي

a مثلاً ومحتواة في A^c.

نجرب جميع النقاط a, b, c, d, e

لكن فقط سنجرب a والباقي لك الطالب

نأخذ المجموعات المفتوحة التي تحوي a

$X , \{a\} , \{a,b,c\}$

إذن a نقطة داخلية لـ A^c لأنه

$$\exists \{a\} \in \tau : a \in \{a\} \subseteq \{a,d,e\}$$

و) ماهي النقاط المحيطة لـ $A=\{a,b\}$

أيضاً نأخذ كل النقاط a , b , c , d , e

نأخذ a بناءاً على التعريف

المجموعات المفتوحة التي تحوي a هي

$$B=\{X,\{a\},\{a,b,c\}\}$$

أريد أن اتقاطع a مع المجموعة B

$$B\cap A=B\cap\{a,b\}\neq\emptyset$$

حيث

$X\cap\{a,b\}\neq\emptyset$

$\{a\}\cap\{a,b\}\neq\emptyset$ ، $\{a,b,c\}\cap\{a,b\}\neq\emptyset$

وأيضاً $B\cap A^{c}=B\cap\{c,d,e\}$

إذاً $X\cap\{c,d,e\}\neq\emptyset$

اختل الشرط $\{a\}\cap\{c,d,e\}=\emptyset$

ومنه a ليست نقطة محيطة

وتكمل باقي العناصر ..