$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = e^{x} \sin x$$

اثبت أن متسلسلة تايلور

لهذه الدالة حول النقطة 0 يعطى بالشكل:

$$e^{x} \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^n \sin \frac{n\pi}{4}}{n!} x^n$$

وأن هذه المتسلسلة متقاربة $\forall x \in \mathbb{R}$

$f(0) = 0$

الحل:

$$f'(x) = e^{x} \sin x + e^{x} \cos x = e^{x} (\sin x + \cos x)$$

$$= \sqrt{2}\, e^{x} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right)$$

$$= \sqrt{2}\, e^{x} \left(\cos \frac{\pi}{4} \sin x + \sin \frac{\pi}{4} \cos x \right)$$

$$f'(x) = \sqrt{2}\, e^{x} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow f'(0) = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4}$$

$$f''(x) = \sqrt{2}\, e^{x} \left(\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$= (\sqrt{2})^2 e^{x} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$= (\sqrt{2})^2 e^{x} \sin \left(x + \frac{2\pi}{4} \right) \Rightarrow f''(0) = (\sqrt{2})^2 \sin \frac{2\pi}{4}$$

$$f^{(n)}(x) = (\sqrt{2})^n e^{x} \sin \left(x + \frac{n\pi}{4} \right)$$

$$e^{x} \sin x = 0 + \frac{\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4}}{1!} x + \frac{\sqrt{2} \sin \frac{2\pi}{4}}{2!} x^2 + \frac{(\sqrt{2})^3 \sin \frac{3\pi}{4}}{3!} x^3$$

$$+ \cdots + \frac{(\sqrt{2})^n \sin \frac{n\pi}{4}}{n!} x^n + \cdots$$

$$e^{x}\sin x=\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^{n}\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}}_{a_n}x^{n}$$

$$a_{n+1}=\frac{(\sqrt{2})^{n+1}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}}{(n+1)!}$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\frac{n+1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{\sin\frac{(n+1)\pi}{4}}=\infty$$

المجال $]-\infty,+\infty[$

اكتب الحدود الثلاثة الأولى من منشور الدالة

$$f(x,y)=e^{x}\cos y$$

في جوار $(0,0)$

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=\sum\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n}$$

$$\cdot F(a,b)+\underbrace{R_{m+1}}_{\text{0 دائماً}}\qquad\left(\begin{matrix}R_{m+1}\to 0\\ m\to\infty\end{matrix}\right)$$

$$f(0,0)=1$$

$$\sum_{n=1}^{2}\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n}f(0,0)$$

نوجد المشتقات

$$f_x(x,y)=e^{x}\cos y\Rightarrow f_x(0,0)=1$$

$$f_{xx}(x,y)=e^{x}\cos y\Rightarrow f_{xx}(0,0)=1$$

$$(f_x)_y=f_{xy}=-e^{x}\sin y\Rightarrow f_{xy}(0,0)=0$$

الموضوع: التاريخ: / / ٢٠

$$f_y(x,y) = -e^{x}\sin y \Rightarrow f_y(0,0) = 0$$

$$f_{yy}(x,y) = -e^{x}\cos y \Rightarrow f_{yy}(0,0) = -1$$

$$(f_y)_x(x,y) = f_{yx}(x,y) = -e^{x}\sin y \Rightarrow f_{yx}(0,0) = 0$$

$$f(h,k) = \underbrace{1}_{f(0,0)} + \frac{1}{1!}(h+0) + \frac{1}{2!}(h^2 - k^2)$$

$$e^{h}\cdot\cos k = 1 + \frac{h}{1!} + \frac{(h^2-k^2)}{2!}$$

بدلالة الـ x و الـ y

$$e^{x}\cos y = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{(x^2-y^2)}{2!}$$

النشر قوى x , y أي بجوار (0,0)

الحالة:

$$f(x,y) = \ln(\underbrace{1 - x + yx - y}_{(1-x)(1-y)\ >\ 0})$$

المضروب يجب أن يكون أكبر من الصفر أي إما الاثنان موجبين أو الاثنان سالبين

$$\left.\begin{array}{l} 1 - x > 0 \Rightarrow 1 > x \\ 1 - y > 0 \Rightarrow 1 > y \end{array}\right\} x^2 + y^2 < 2$$

لا يمكن أخذ الاثنين سالبين لا نحتمل جوار النقطة صفر (النظير أصغر من δ)

وأيضاً مثلاً لو أخذنا $\ln(-5)(-3) = \underbrace{\ln -5}_{\text{غير معرف}} + \underbrace{\ln -3}_{\text{غير معرف}}$

$$\ln((1-x)(1-y)) = \ln(1-x) + \ln(1-y)$$

المشتق الاول $f_x(x,y) = -\dfrac{1}{1-x} \Rightarrow f_x(0,0) = -1$

المشتق الثاني $f_{xx}(x,y) = -\dfrac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow f_{xx}(0,0) = -1$

المشتق الثالث $f_{xxx}(x,y) = \dfrac{-2}{(1-x)^3} \Rightarrow f_{xxx}(0,0) = -2$

$$f_x^{n}(x,y) = \frac{-(n-1)!}{(1-x)^n} \longrightarrow f^{(n)}(0,0) = -(n-1)!$$

نفس الطريقة بدي تشتق
وسوف تظهر نفس الاجوبة لكن بدل كل x ب y

$$f_y^{n}(x,y) = \frac{-(n-1)!}{(1-y)^n} \longrightarrow f_y^{(n)}(0,0) = -(n-1)!$$

$$f_{xy}^{n}(x,y) = 0$$

$$f(a+h, b+k) - f(0,0) = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(0,0) + R$$

المشتقات الجزئية موجودة لجميع الرتب تكون صفر R_{m+1}

$$f(0,0) = 0$$

$$\ln(1-h-k+hk) = \frac{-(h+k)}{1!} - \frac{(h^2+k^2)}{2!} - \frac{2(h^3+k^3)}{3!} - \frac{3!(h^4+k^4)}{4!} - \dots$$

$$\ln(1-h-k+hk) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n+k^n}{n}$$