الحركات المركزية لنقطة مادية:

قانون السطوح:

لتكن M نقطة مادية كتلتها m خاضعة لمجموعة قوى محصلتها $\vec{F}$ يمر خط تأثيرها من نقطة ثابتة (O) [تسمى الأصل] مثل هذه القوى تدعى بالقوة المركزية.

في هذه الحالة يكون لدينا:

$$\vec{r} \times \vec{F} = 0$$

ونعلم من نظرية العزم الحركي:

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r} \times m\vec{v}\right] = 0$$

أو:

$$\vec{r} \times m\vec{v} = c = const$$

خارجياً

الحركة تمر في المبدأ $\boxed{r \times \vec{v} = c}$

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = r \times \vec{F}$$

$\vec{r} \times \vec{F} = 0$ تتحقق [تم أخذها سابقاً]

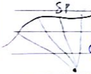
$\vec{F} = 0$ أو $\vec{r} \parallel \vec{F}$ [شعاعين متوازيين]

عندما تكون مسار النقطة المادية الخاضعة لتأثير قوة مركزية يمر في المبدأ فإن الحركة تكون مستوية ومنه يمكن التعبير عن قانون السطوح:

$$\boxed{|\vec{r} \times \vec{v}| = 2\frac{ds}{dt}}$$

قانون السطوح في الاحداثيات الديكارتية

حيث $\frac{ds}{dt}$ هي السرعة السطحية



بما أن الحركة خاضعة لقوة مركزية، والقوة المركزية منطبقة على نصف القطر الشعاعي للنقطة M الذي هو r عندئذ يكون لدينا التالي، الأسهل استخدام الاحداثيات القطبية

Subject:

ومنه فإن قانون السطوح : (r, φ)

$$\boxed{r^2 \frac{d\varphi}{dt} = C}$$

حيث C يدعى بثابت السطوح.

دستور بينيه :

يوجد دستورين : اذا كانت سرعة نأخذ الدستور الأول.

اذا كانت التسارع نأخذ الدستور الثاني.

نعلم أن سرعة نقطة مادية في الإحداثيات القطبية تعطى بالشكل

$$\vec{v}= \left[\frac{dr}{dt}\right]^2 + r^2\left[\frac{d\varphi}{dt}\right]^2$$

نفرض أن:

$$u = \frac{1}{r}$$

وبالتالي نلاحظ أن :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

$$= \frac{c}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\varphi}$$

لدينا:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r}$$

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi}$$

نعوض العلاقات في قانون السرعة فنحصل على العلاقة التالية

$$v = c^2\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2$$

دستور بينه الأول [يعطي سرعة النقطة المادية]

أما قانون بينه الثاني فيعطى بالعلاقة :

$$F = -mc^2u^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right]$$

ملاحظة : استنتاج قانون بينه الأول غير مطالبين فيه.

* حركة نقطة تخضع لقوة من الشكل $F = -m\omega^2 r$

هذه القوة مركزية وجاذبة وتتناسب طرداً مع بعد النقطة عن مركز الجذب.

+ المعادلة التفاضلية لحركة النقطة الخاضعة لهذه القوة هي من الشكل :

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -m\omega^2 r$$

نقسم الطرفين على m فيكون

$$r'' + \omega r = 0$$ معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية

الحل العام لها يعطى بالشكل :

$$r = r_0\cos\omega t + \frac{r_0'}{\omega}\sin\omega t$$

حيث r_0 , r_0' تم تعيينها من شروط البدء

بالإسقاط على المحورين r_0 , r_0' موازيين لـ x, y على الترتيب

$x = r_0\cos\omega t$ }
$y = \frac{r_0'}{\omega}\sin\omega t$ } معادلات وسيطية

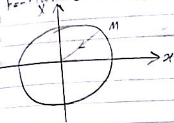
نتخلص من الزمن [نربع العلاقتين ونجمع] يكون

$$\frac{x^2}{r_0^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{r_0'}{\omega}\right)^2} = 1$$

معادلة قطع ناقص.

Subject:

اذا طلب ايجاد مسار نقطة خاضعة لقوة مركزية من الشكل $F=-m\omega^2 r$
فهي قطع زائد.



$$m\frac{d^2r}{dt^2}=m\omega^2 r$$

معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية.
$$r''-\omega^2 r=0$$

نحل هذه المعادلة فنحصل على الحل العام:

$$r=r_0\,ch\,\omega t+\frac{r_0'}{\omega}\,sh\,\omega t$$

باسقاط هذه المعادلة على المحورين r_0, r_0' موازيين لـ x, y على الترتيب:

$$x=r_0\,ch\,\omega t$$
$$y=\frac{r_0'}{\omega}\,sh\,\omega t$$

نتخلص من الزمن فنجد [تربيع وتطرح]

$$\frac{x^2}{r_0^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{r_0'}{\omega}\right)^2}=1$$

معادلة قطع زائد.

انتهت المحاضرة.