الخميس: 2015/5/21

المحاضرة الثامنة عشر:

تمارين:

1 ابحث في الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية:

$$z^2 w'' + z w' + \left(z^2 - \frac{1}{9}\right) w = 0$$

في جوار الصفر.

الحل:

نقارن هذا الشكل مع الشكل العام لمعادلة بسل:

$$z^2 w'' + z w' + \left(z^2 - \nu^2\right) w = 0$$

$$\nu^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow \nu = \mp \frac{1}{3}$$

ν ليس عدداً صحيحاً أو صفراً.

$$w = A\, J_{\nu}(z) + B\, J_{-\nu}(z)$$

$$= A\, J_{\frac{1}{3}}(z) + B\, J_{-\frac{1}{3}}(z)$$

where;
$$J_{\frac{1}{3}}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-z^2/4\right)^n}{n!\, \Gamma\left(\frac{4}{3}+n\right)}$$

$$J_{-\frac{1}{3}}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-z^2/4\right)^n}{n!\, \Gamma\left(\frac{2}{3}+n\right)}$$

وهو المطلوب.

ALADIB.net
أصنع الحضارة

/ /

2 برهن أنّ:

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \frac{A}{\sqrt{z}} \sin z \quad ; \quad A = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

الحل:

ننطلق من الطرف الأيسر

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-z^2/4)^n}{n!\,\Gamma(n+\frac{3}{2})} \quad (*)$$

هدفنا هو حساب $\Gamma(n+\frac{3}{2})$

لدينا: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

$$\Gamma(n+\tfrac{3}{2}) = \Gamma(\underbrace{n+\tfrac{1}{2}}_{x}+1) = (n+\tfrac{1}{2})\,\Gamma(n+\tfrac{1}{2})$$

$$= (n+\tfrac{1}{2})\,\Gamma(n+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}) = (n+\tfrac{1}{2})(n-\tfrac{1}{2})$$

$$.\,\Gamma(n-\tfrac{1}{2}) = - - - \quad = - - -$$

نستمر n مرة:

$$= (n+\tfrac{1}{2}).(n-\tfrac{1}{2}).(n-\tfrac{3}{2}).(n-\tfrac{5}{2}) - - - 3.2\,\tfrac{1}{2}\,\Gamma(\tfrac{1}{2})$$

نوحد المقامات:

$$= \frac{(2n+1)}{2}.\frac{(2n-1)}{2}.\frac{(2n-3)}{2}\frac{(2n-5)}{2} - - - \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

نضرب البسط والمقام بـ $2^n.n!$

$$\Gamma(n+\tfrac{3}{2}) = \frac{(2n+1)!}{2^n.2.2^n.n!}\sqrt{\pi} = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}(n!)}\sqrt{\pi}$$

نعوض في $(*)$

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-z^2/4)^n}{\cancel{n!}\,\frac{(2n+1)!}{\cancel{2^{2n+1}}\,(\cancel{n!})}\sqrt{\pi}}$$

أمنو الحضارة
ALAUIB.net

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1.2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}$$

نضرب البسط والمقام بـ z :

$$= \frac{1}{z}\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1.2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{z}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin z$$

بشكل مشابه :

$$J_{-\frac{1}{2}}(z) = \frac{B}{\sqrt{z}} \cos z \quad ; \quad B = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

الدالة المولدة لتوابع بسل :

تسمى الدالة :

$$e^{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z) \cdot t^n$$

حيث n عدد صحيح حصراً.

بالدالة المولدة لدوال بسل ، وسنقوم باستنتاج بعض الصيغ التكرارية لتوابع بسل استناداً إلى الدالة المولدة لتوابع بسل.

العلاقات التكرارية لدوال بسل هي :

1. $$J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z) - J_{n-1}(z)$$
2. $$J_n'(z) = \frac{1}{2}\left[J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)\right]$$
3. $$\frac{d}{dz}\left[z^n \cdot J_n(z)\right] = z^n \cdot J_{n-1}(z)$$

ALADIB.net

4] $$\frac{d}{dz}\left[z^{-n} J_n(z)\right] = -z^{-n} J_{n+1}(z)$$

الإثبات:

1] نفاضل طرفي الدالة المولدة بالنسبة لـ t:

$$\frac{z}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right) e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \cdot J_n(z) \cdot t^{n-1}$$

نعوض عن هذا المقدار بقيمته:

$$\frac{z}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z) \cdot t^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n\, J_n(z) \cdot t^{n-1}$$

نفك الأقواس

$$\left(\frac{z}{2}+\frac{z}{2t^2}\right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z) \cdot t^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \cdot J_n(z) \cdot t^{n-1}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{z}{2} J_n(z) \cdot t^n + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{z}{2} J_n(z)\, t^{n-2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \cdot J_n(z) \cdot t^{n-1}$$

نقوم بعملية المطابقة

أمثال t^{n-1} في الطرفين

$$\frac{z}{2} J_{n-1}(z) + \frac{z}{2} J_{n+1}(z) = n\, J_n(z)$$

نضرب الطرفين بـ $\frac{2}{z}$

$$J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z) - J_{n-1}(z) \qquad (1)$$

ALADIB.net

2. نفاضل طرفي الدالة المولدة لتوابع بسل بالنسبة لـ z فنجد أن:

$$\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right) e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J'_n(z).t^n$$

$$\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z).t^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J'_n(z).t^n$$

نفك الأقواس:

$$\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z)\,.t^{n+1} - \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z)\,.t^{n-1} = \sum_{n=-\infty} J'_n(z).t^n$$

بالمطابقة بأمثال t^n في الطرفين:

$$J'_n(z) = \frac{1}{2} J_{n-1}(z) - \frac{1}{2} J_{n+1}(z)$$

$$J'_n(z) = \frac{1}{2}\left[J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)\right] \qquad (ii)$$

3. من (ii) نجد: بالضرب الطرفين بـ (2):

$$J_{n+1}(z) = J_{n-1}(z) - 2J'_n(z) \qquad (I)$$

بطرح العلاقة (I) من العلاقة (i) والإصلاح نحصل على:

$$0 = \frac{2n}{z} J_n(z) - 2J_{n-1}(z) + 2J'_n(z)$$

نضرب طرفي العلاقة بـ $\frac{z}{2}$

$$n.J_n(z) + z.J'_n(z) = z\,J_{n-1}(z)$$

ابنة الحضارة
ALADIB.net

نضرب طرفي العلاقة الأخيرة بـ z^{n-1}

$$n \cdot z^{n-1} J_n(z) + z^n J_n'(z) = z^n \cdot J_{n-1}(z)$$

$$\frac{d}{dz}\left[z^n \cdot J_n(z) \right] = z^n J_{n-1}(z) \qquad (iii)$$

$\boxed{4}$ نجمع العلاقة (ii) مع (I) نجد:

$$2J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z) - 2J_n'(z)$$

نضرب طرفي العلاقة بـ $\frac{z}{2}$

$$z \cdot J_n'(z) - n \cdot J_n(z) = -z J_{n+1}(z) \qquad (*) \quad \text{للحفظ}$$

نضرب طرفي العلاقة بـ z^{-n-1}

$$z^{-n} \cdot J_n'(z) - n \cdot z^{-n-1} J_n(z) = -z^{-n} J_{n+1}(z)$$

$$\frac{d}{dz}\left[z^{-n} J_n(z) \right] = -z^{-n} \cdot J_{n+1}(z). \qquad (iv)$$

وهو المطلوب.

مثال:

برهن صحة العلاقتين التاليتين:

$$J_{\frac{3}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\frac{\sin z - z \cos z}{z} \right)$$

$$J_{-\frac{3}{2}}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\frac{z \cdot \sin z + \cos z}{z} \right)$$

البرهان:

بالاستناد إلى الصيغ التكرارية نعلم من $\boxed{1}$

$$J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z) - J_{n-1}(z)$$

$$n = \frac{1}{2} \Rightarrow J_{\frac{3}{2}}(z) = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{z} J_{\frac{1}{2}}(z) - J_{-\frac{1}{2}}(z)$$

$$J_{\frac{3}{2}}(z) = \frac{1}{z} J_{\frac{1}{2}}(z) - J_{-\frac{1}{2}}(z)$$

لدينا حسب المثال السابق:

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{A}{z}} \cdot 2z \quad ; \quad A = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$J_{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{B}{z}} \cdot \cos z \quad ; \quad B = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

نعوض $J_{-\frac{1}{2}}$ ، $J_{\frac{1}{2}}$ فنحصل على المطلوب

لإثبات العلاقة (2) نعطي $n = -\frac{1}{2}$ في العلاقة (1)

$$n = -\frac{1}{2} \Rightarrow J_{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{z} J_{-\frac{1}{2}}(z) - J_{-\frac{3}{2}}(z)$$

$$J_{-\frac{3}{2}}(z) = -\frac{1}{z}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z - \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\frac{\cos z + z\sin z}{z}\right]$$

منتدى الحضارة
ALADIB.net

مثال:

برهن ما يلي:

$$\int z^{n} \cdot J_{n-1}(z)\, dz = z^{n} \cdot J_{n}(z) + c \qquad (1)$$

$$\int z^{-n} \cdot J_{n+1}(z)\, dz = -z^{-n} J_{n}(z) + c \qquad (2)$$

البرهان:

من العلاقة $\boxed{3}$

$$\frac{d}{dz}\left[z^{n} \cdot J_{n}(z)\right] = z^{n} \cdot J_{n-1}(z)$$

بتكامل الطرفين نحصل على المطلوب:

$$\int z^{n} \cdot J_{n-1}(z)\, dz = z^{n} \cdot J_{n}(z) + c$$

ومن العلاقة $\boxed{4}$ نجد:

$$\frac{d}{dz}\left[z^{-n} \cdot J_{n}(z)\right] = -z^{-n} J_{n+1}(z)$$

بالمكاملة نحصل على المطلوب:

$$\int z^{-n} J_{n+1}(z)\, dz = -z^{-n} J_{n}(z) + c$$

مثال:

أوجد قيمة التكامل:

$$I = \int z^{4} J_{1}(z)\, dz$$

الحل:

$$I = \int z^{2} \cdot \left(z^{2} J_{1}(z)\right) dz$$

نكامل بالتجزئة فنجد:

$$u = z^{2} \rightarrow du = 2z\, dz$$

ALMOHIB.net

$$dv = z^2 J_1(z)\, dz \Rightarrow v = z^2 . J_2(z)$$

وذلك من العلاقة (1) في التمرين السابق.

$$\Rightarrow I = z^4 J_2(z) - 2\int z^3 J_2(z)\, dz$$

$$= z^4 J_2(z) - \underbrace{2 z^3 J_3(z)}_{\text{من } \boxed{4}} + c$$

وهو المطلوب.

مثال:

أثبت أن:

(للحفظ) $J_0'(z) = -J_1(z)$ (1)

$J_2(z) - J_0(z) = 2J_0''(z)$ (2)

الحل:

من العلاقة (*)

$$z J_n'(z) = n J_n(z) - z J_{n+1}(z)$$

$$n=0 \Rightarrow z J_0'(z) = -z J_1(z)$$

نختصر على z

$$J_0'(z) = -J_1(z)$$

باستخدام العلاقة التكرارية الثانية $\boxed{2}$ بعد ضرب ب (2):

$2J_n'(z) = J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)$ (A)

$2J_n''(z) = J_{n-1}'(z) - J_{n+1}'(z)$ (B)

ALADIB.net

نعطي $n-1 \to n$ وأيضاً $n+1 \to n$ بالعلاقة (A)

$$2J'_{n-1}(z) = J_{n-2}(z) - J_n(z)$$

$$2J'_{n+1}(z) = J_n(z) - J_{n+2}(z)$$

بالتعويض عن كل حد بقيمته في (B)

$$2J''_n(z) = \frac{1}{2}\left[J_{n-2}(z) - J_n(z)\right] - \frac{1}{2}\left[J_n(z) - J_{n+2}(z)\right]$$

بضرب طرفي العلاقة ب (2):

$$4J''_n(z) = J_{n-2}(z) - 2J_n(z) + J_{n+2}(z)$$

$$n=0 \Rightarrow 4J''_0(z) = J_{-2}(z) - 2J_0(z) + J_2(z)$$

من علاقة الارتباط الخطي:

$$J_{-n}(z) = (-1)^n \cdot J_n(z)$$

$$\Rightarrow 4J''_0(z) = (-1)^2 J_2(z) - 2J_0(z) + J_2(z)$$

$$= 2J_2(z) - 2J_0(z)$$

نقسم طرفي العلاقة الأخيرة على (2):

$$2J''_0(z) = J_2(z) - J_0(z)$$

مثال:

عبّر عن $J_4(z)$ بدلالة J_0 ، J_1

الحل:

من العلاقة التكرارية $\boxed{1}$

$$J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z) - J_{n-1}(z)$$

$n=3 \Rightarrow J_4(z) = \frac{6}{z} J_3(z) - J_2(z)$

$n=2 \Rightarrow J_3(z) = \frac{4}{z} J_2(z) - J_1(z)$

$$J_4(z) = \frac{6}{z}\left[\frac{4}{z} J_2(z) - J_1(z)\right] - J_2(z)$$

$$= \left[\frac{24}{z^2} - 1\right] J_2(z) - \frac{6}{z} J_1(z)$$

$n=1 \Rightarrow J_2(z) = \frac{2}{z} J_1(z) - J_0(z)$

$$\Rightarrow J_4(z) = \left(\frac{24}{z^2} - 1\right)\left(\frac{2}{z} J_1(z) - J_0(z)\right) - \frac{6}{z} J_1(z)$$

$$= \left(\frac{48}{z^3} - \frac{8}{z}\right) J_1(z) - \left(\frac{24}{z^2} - 1\right) J_0(z)$$

انتهت المحاضرة...

ALADIB.net