حل مسألة الشروط للمعادلة التفاضلية الجزئية باستخدام فصل المتحولات

يمكن حل مسألة الشروط الجزئية باستخدام فصل المتحولات في البحث عن الدالة المجهولة $Z = Z(x,y)$ في شكل دالتين الأولى تتبع لـ x فقط والثانية تتبع لـ y فقط أي: $Z = X_{(x)} \cdot Y_{(y)}$

عندئذ تحول جميع المشتقات الجزئية إلى مشتقات عادية «نضع لا نانة بالنسبة لـ x والعكس صحيح»

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = x'y \quad , \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = y'x \quad , \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = x''y \quad , \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = x'y' ,$$

$$t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = xy''$$

بعد الاشتقاق والتعويض بالمعادلة التفاضلية الجزئية نحصل على معادلة تفاضلية عادية بالنسبة لـ x و y من الشكل:

$$F(x,x',x'') = G(y,y',y'') \; \text{إما} \; \lambda \; \text{أو} \; \pm\lambda^2$$

ملاحظة: نضع λ عندما تكون المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى وإذا كانت من المرتبة الثانية نضع إما λ^2 أو $-\lambda^2$ ولا يوجد معيار محدد لاختيار إشارة λ^2

مثال: باستخدام فصل المتحولات أوجد الحل العام لمسألة الشروط التالية

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4 \frac{\partial z}{\partial y} \quad ; \quad Z(0,y) = 8e^{-3y}$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = x'y \quad , \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = xy'$$

نعوض

$$x'y = 4xy'$$

$$\frac{1}{4}x'y = xy'$$

نقسم على xy

[يفضل دائماً أن يكون الثابت بالمقام.
ونضع λ لأن مرتبة المعادلة تساوي 1]

[نأخذ 1 مع 3 ثم 2 مع 3]

$$\frac{x'}{4x} = \frac{y'}{y} = \lambda$$

1 2 3

[illegible]

$$\frac{x'}{4x} = \lambda \Rightarrow \ln|x| = 4\lambda x + c_1' \Rightarrow e^{\ln|x|} = e^{4\lambda x + c_1'}$$

$$x = e^{4\lambda x} \cdot e^{c_1'}$$

بفرض $e^{c_1'} = c_1$ نجد

$$x = c_1 e^{4\lambda x}$$

$$\frac{y'}{y} = \lambda \Rightarrow \ln|y| = \lambda y + c_2' \Rightarrow e^{\ln|y|} = e^{\lambda y + c_2'}$$

$$y = e^{\lambda y} \cdot e^{c_2'}$$

بفرض $e^{c_2'} = c_2$ نجد أن

$$y = c_2 e^{\lambda y}$$

$$Z = x.y \Rightarrow Z = (C_1 e \cdot C_2 e)$$

$$= C_1 C_2 e^{4\lambda x + \lambda y}$$

نفرض $C_1 C_2 = C_3$ نجد

$$Z = C_3 e^{4\lambda x + \lambda y} \quad \ldots\ldots \circledast$$

من الشرط الابتدائي ونعوض بـ $\circledast$

$$Z(0,y) = 8e^{-3y} = C_3 e^{\lambda y}$$

بالمطابقة نجد $\boxed{C_3 = 8}$ و $\boxed{\lambda = -3}$ نعوض بـ $\circledast$

$$\Rightarrow Z = 8e^{-3x-3y}$$

باستخدام فصل المتغيرات اوجد الحل العام لمسألة الشروط التالية

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\frac{\partial z}{\partial y} + z \quad \ldots\ldots (1) \qquad \Big| \quad Z(x,0) = 3e^{-5x} + 2e^{-3x}$$

نعوض بـ (1) $P = \frac{\partial z}{\partial x} = x'y \;,\; q = \frac{\partial z}{\partial y} = xy' \;,\; z = x.y$

$$x'y = 2xy' + x.y$$

$$\frac{x'}{x} = \frac{2y'}{y} + 1 = \lambda$$

$$\frac{x'}{x} = \lambda \Rightarrow \ln|x| = \lambda x + C_1' \Rightarrow x = e^{\lambda x + C_1'} = C_1 e^{\lambda x} = x$$

$$\frac{2y'}{y} + 1 = \lambda \Rightarrow \frac{2y'}{y} = \lambda - 1 \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{\lambda - 1}{2} \Rightarrow \ln|y| = \left(\frac{\lambda-1}{2}\right)y + C_2'$$

$$y = e^{\left(\frac{\lambda-1}{2}\right)y + C_2'} \Rightarrow y = C_2 e^{\left(\frac{\lambda-1}{2}\right)y}$$

$$\Rightarrow Z = x.y \Rightarrow Z = C_1 e^{\lambda x} \cdot C_2 e^{\left(\frac{\lambda-1}{2}\right)y} \;*$$

$$= C_1 C_2 e^{\lambda x + \left(\frac{\lambda-1}{2}\right)y}$$

حيث $C_3 = C_1 . C_2$

$$Z = C_3 e^{\lambda\left(x + \frac{y}{2}\right) - \frac{y}{2}}$$

الحل الذي طلع عندنا هو حد واحد ولكن الشرط عندنا يتألف من حدين لذلك سنستخدم تركيب الحلول

نستخدم مبدأ تركيب الحلول

$$\boxed{Z = C_4 e^{\lambda_1 (x + \frac{y}{2}) - \frac{y}{2}} + C_5 e^{\lambda_2 (x + \frac{y}{2}) - \frac{y}{2}}} \quad (2)$$

هنا نركيب الحلول هو ان نكتب نفس الحل اكثر من مرة بشكل مجموع ولكن نبدل الثوابت

نعوض بالشرط الابتدائي نجد

$$Z(x,0) = C_4 e^{\lambda_1 x} + C_5 e^{\lambda_2 x}$$

بالمطابقة مع الشرط الابتدائي نجد ان

$$C_4 = 3, \quad C_5 = 2, \quad \lambda_1 = -5, \quad \lambda_2 = -3$$

نعوض ب (2) نجد

$$Z = 3 e^{-5 (x + \frac{y}{2}) - \frac{y}{2}} + 2 e^{-3 (x + \frac{y}{2}) - \frac{y}{2}}$$

باستخدام فصل المتحولات اوجد الحل العام لمسألة الشروط التالية

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2} \frac{\partial u}{\partial t}$$

حيث h ثابت و u محدودة و $0 < x < 3$ و

$$U(0,t) = U(3,t) = 0$$

$$U(x,0) = 5 \sin 4\pi x - 3 \sin 8\pi x + 2 \sin 10\pi x$$

$$p = X'T, \quad q = XT', \quad r = X''T \implies \text{نعوض}$$

$$\implies X''T = \frac{1}{h^2} X T' \implies \frac{X''}{X} = \frac{1}{h^2} \frac{T'}{T} = -\lambda^2$$

ملاحظة:

هنا كنا أمام خيارين اما λ^2 أو $-\lambda^2$ ولكن هنا اخترنا $-\lambda^2$ لانه يجعل u محدودة حيث عندما نجد الحل عندها اوجد الحل لـ t عندما تكون $\infty \to t$ إذا كانت $-\lambda^2$ أما لو كانت $+\lambda^2$ ستكون $t = \infty$ وهذا ما ينافي لانه يجعل u غير محدود

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2$$

$$X'' = -\lambda^2 X \implies X'' + \lambda^2 X = 0$$

معادلة حلها كرايناها المعادلة المميزة لا

$$\mu^2 + \lambda^2 = 0$$

$$\implies \mu_1 = i\lambda, \quad \mu_2 = -i\lambda$$

$$X = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$$

$$\frac{1}{h^2} \frac{T'}{T} = -\lambda^2 \implies \frac{T'}{T} = -h^2 \lambda^2$$

$$\ln |t| = -h^2 \lambda^2 t + C_3'$$

$$t = e^{-h^2 \lambda^2 t + C_3'}$$

$$t = C_3 e^{-h^2 \lambda^2 t}$$

$$v = X \cdot T = [C_1 \cos\lambda x + C_2 \sin\lambda x]\, C_3 e^{-h^2\lambda^2 t}$$

$$= C_4 \cos\lambda x\, e^{-h^2\lambda^2 t} + C_5 \sin\lambda x\, e^{-h^2\lambda^2 t} \quad \ldots (2)$$

من الشرط الابتدائي الاول .. التعويض كل عدد من المعادلة (2)

$$0 = v(0,t) = C_4 e^{-h^2\lambda^2 t} \Rightarrow C_4 = 0$$

$$v = C_5 \sin\lambda x\, e^{-h^2\lambda^2 t} \quad — (3)$$

من الشرط الابتدائي الثاني .. هنا نعوض ب 3

$$0 = v(3,t) = C_5 \sin 3\lambda\, e^{-h^2\lambda^2 t}$$

اما $C_5 = 0$ ولكننا رفضنا لاننا لانريد الحل الصفري

$$\Rightarrow \sin 3\lambda = 0 \Rightarrow \sin 3\lambda = \sin n\pi \quad ; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\Rightarrow 3\lambda = n\pi \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{3}$$

$$v = C_5 \sin\frac{n\pi}{3} x\, e^{-h^2 \frac{n^2}{9}\pi^2 t} \quad \ldots (4)$$

لا نستطيع استخدام [illegible] لذلك نستخدم تركيب الحلول

نستخدم تركيب الحلول

$$v = C_6 \sin\frac{n_1}{3}\pi x\, e^{-h^2 \frac{n_1^2}{9}\pi^2 t} + C_7 \sin\frac{n_2}{3}\pi x\, e^{-h^2 \frac{n_2}{9}\pi^2 t} +$$

$$+ C_8 \sin\frac{n_3}{3}\pi x\, e^{-h^2 \frac{n_3}{9}\pi^2 t} \quad \ldots (*)$$

بالمطابقة مع الشرط الابتدائي الثالث نجد: $v(x,0)$

$$C_6 = 5,\ C_7 = -3,\ C_8 = 2,$$

$$\frac{n_1}{3} = 4 \Rightarrow n_1 = 12 \ \Big/\ \frac{n_2}{3} = 8 \Rightarrow n_2 = 24 \ \Big/\ \frac{n_3}{3} = 10 \Rightarrow n_3 = 30$$

نعوض في (*) نجد

$$v = 5 \sin 4\pi x\, e^{-16 h^2\pi^2 t} - 3 \sin 8\pi x\, e^{-64 h^2\pi^2 t} + 2 \sin 10\pi x\, e^{-100 h^2\pi^2 t}$$