البرمجة اللاخطية :

مقدمة :

اجريت في السنوات الأخيرة بحوث كثيرة تتناول حلولاً لما يسمى مسائل البرمجة اللاخطية حيث انه يوجد عائق رئيسي يعترض دراسة البرمجة اللاخطية ، وهو التشكيلة الواسعة من التقنيات المطبقة حالياً في معالجة المسائل الخاصة بالبرمجة اللاخطية حيث تم اقتراح العديد من الإجراءات الخوارزمية لحل مسائل البرمجة اللاخطية، ولكن مجموعة قليلة منها أثبتت فعلياً انها مفيدة في التعامل مع المشاكل الواقعية.
إن بعضاً من أهم التقنيات تتناول تقريبات معينة وتستخدم مسائل برمجة لاخطية فرعية ، وفيما يلي سنتعرف على الأسس والمبادئ المهمة للبرمجة اللاخطية. وسنشرح عدة خوارزميات مهمة مستخدمة في حل مسائل البرمجة اللاخطية.
حيث تم اختيار هذه الخوارزميات للاسباب التالية :

1- استخدام النتائج من الناحية العملية وحصولها على نسبة نجاح مرتفعة.
2- كل خوارزمية منتقاة توضح منهجاً اساسياً فيما يتعلق بحل مسائل البرمجة اللاخطية.
3- برمجيت جميعها من اجل حواسيب رقمية.

تعريف المسألة : تعرف مسألة البرمجة اللاخطية ببرنامج رياضي معمم

$f(x) \quad ; \quad x = (x_1, \ldots, x_n)$

مع مراعاة القيود من النوع :

$H_i(x) = 0 \quad ; \quad i = \overline{1,m}$ قيود مساواة.

$g_j(x) \leq 0 \quad ; \quad j = \overline{1,n}$ قيود متراجحات.

هنا نقدم التعاريف التالية :

لدينا n متحول قرار و m قيد مساواة و n قيد متراجحة

عندئذ :

* اذا كان تابع الهدف وتوابع القيود خطية نحصل على مسألة برمجة خطية وهذا مادرسناه سابقاً. (في المحاضرات السابقة).
* اذا كانت القيود اي مركبة لـ $f(x)$ أو $H_i(x)$ أو $g_j(x)$ تحوي توابع لاخطية فإن المسألة تصبح مسألة برمجة لاخطية ، وتكون قيود عدم السلبية مشمولة ضمناً في قيود المتراجحات.

(NOTE) توابع لاخطية مثل التوابع المثلثية أو الاسية أو ......

ان اي شعاع حل x يحقق مجموعة m قيد مساواة و n قيد متراجحات يدعى حلاً معقولاً .

ندعو اي مجموعة خاصة من المتحولات التي تعطي قيمة اعظمية للتابع $f(x)$ شعاع حل امثل
ان العديد من مسائل البرمجة الخطية لها عدة اشعة تؤدي الى نفس القيمة الاعظمية للتابع $f(x)$.

ان القرار بأن مسألة البرمجة الخطية تملك أو لا تملك حلاً امثلاً متعلقة بكون أو عدم كون المسألة محدودة بالنسبة لمتحولات الحل الخارجي . ان تعيين ما اذا كان هناك حل امثل موجود لمسألة برمجة خطية محدودة هو امر متعلق بتابع الهدف ومجموعة القيود .

من اهم الامور الواجب دراستها هو تزايد وتناقص تابع :

التوابع المتزايدة و التوابع المتناقصة :

اذا كان $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$

- عندئذٍ فإننا نقول عن التابع $f(x)$ انه تابع متزايد تماماً اذا تحقق :
$$f(x_1) < f(x_2) < \dots < f(x_n)$$
- ونقول عن التابع $f(x)$ انه متناقص تماماً اذا تحقق :
$$f(x_1) > f(x_2) > \dots > f(x_n)$$
- اذا كان : $x_n < x_{n+1}$ عندئذٍ نقول ان $f(x)$ تابع متزايد اذا حقق $f(x_n) \leq f(x_{n+1})$
- ايضاً اذا كان $x_n < x_{n+1}$ عندئذٍ نقول ان $f(x)$ تابع متناقص اذا حقق $f(x_n) \geq f(x_{n+1})$

ان تزايد وتناقص التابع يحدد لنا ما اذا كان التابع وحيد نمط أو متعدد انماط . حيث :

التابع الاحادي النمط : اذا كان التابع $f(x)$ متزايد (متناقص) تماماً في مجال معين الى قيمة معينة ثم متناقص (متزايد) عندئذٍ نقول ان التابع احادي النمط . وبالتالي يكون للتابع قمة واحدة أو وادي واحد .

التابع المتعدد الانماط : اذا كان للتابع اكثر من قمة و اكثر من وادي ضمن مجال معين عندئذٍ يدعى التابع متعدد انماط .

تصنيفات التوابع : تصنف التوابع الى :
1 - توابع مستمرة .
2 - توابع غير مستمرة .
3 - توابع متقطعة .
قد يكون التابع محدب او مقعر : حيث يعرف :
التابع المحدب : يكون التابع $f(x)$ تابع محدب على مجال تعريفه اذا كان من اجل اي نقطتين x_1 , x_2 من فضاء بعده n تحقق المتراجحة التالية :
$$f[(1-\theta)x_1 + \theta x_2] \leq (1-\theta) f(x_1) + \theta f(x_2)$$
حيث $0 \leq \theta \leq 1$

التابع المقعر : يعرف التابع المقعر بشكل مشابه لتعريف التابع المحدب ولكن المتراجحة معكوسة .
المعنى الهندسي للتعريف السابق :
اذا كان تابع ما محدب (مقعر) ورسم خط بياني بين نقطتين من سطحه فإن الجزء من الخط الذي يصل بين النقطتين سيوضع بشكل كامل الى اعلى (اسفل) ذلك التابع ، وهنا نقدم الحقائق التالية :
1 - لا يتعلق تعريف تابع محدب (مقعر) بكون التابع مستمر (او غير مستمر) .
2 - يمكن ان يكون تابع ما مقعر بمنطقة ومحدب بأخرى .
3 - التابع الخطي مقعر ومحدب معاً .
المسألة الأولى :
تأثير التحدب والتقعر في البحث عن الحلول المثلى :
1 - اذا كان تابع الهدف غير مقيد : اذا كانت مسألة البرمجة اللاخطية تتألف من تابع هدف فقط اي المسألة غير مقيدة وكان هذا التابع محدب (مقعر) فإنه يوجد حل وحيد عند نقطة تقع داخل منطقة الحلول حيث تنعدم جميع المشتقات . او عند نقطة حدية .

2 - ايجاد القيمة العظمى في حال تابع الهدف مقيد : اذا كانت مسألة البرمجة اللاخطية تتألف من تابع هدف وقيود فإن كون الحل الامثل وحيد يتوقف على طبيعة كلاً من تابع الهدف ومجموعة القيود . فإذا كان تابع الهدف مقعراً و مجموعة القيود منطقة محدبة فإن للمسألة حل اعظمي وحيد .
وبالتالي فإن اي نقطة مستقرة تكون حلاً اعظمياً .

3- إيجاد القيمة الصغرى في حال تابع هدف مقيد :

إذا كانت مسألة البرمجة اللاخطية تتألف من تابع هدف وقيود وكان تابع الهدف محدباً ومجموعة القيود تشكل منطقة محدبة فإن أي نقطة مستقرة تكون حلاً أصغرياً .

ملاحظة : إن التابع الخطي هو تابع محدب ومقعر في آن معاً .

المصفوفات الصغرى الأساسية :

إذا كانت المصفوفة Q ذات الأبعاد $m \times n$ فإن المصفوفة الصغرى الأساسية من المرتبة k هي مصفوفة ذات أبعاد $k \times k$ نحصل عليها بإهمال $n-k$ سطر و الأعمدة المقابلة لها :

مثال: لتكن لدينا المصفوفة :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

- عندئذ المصفوفات الصغرى الأساسية من المرتبة واحد هي عناصر القطر الرئيسي .
- المصفوفات الصغرى الأساسية من المرتبة $\boxed{2}$ هي :

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ ← ناتجة عن حذف (إهمال) السطر الثالث والعمود الثالث .

$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$ ← ناتجة عن إهمال السطر الأول والعمود الأول .

$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ ← ناتجة عن إهمال السطر 2 والعمود 2 .

- المصفوفة الصغرى الأساسية من المرتبة 3 هي Q نفسها .

تعريف : ندعو معين المصفوفة الصغرى الأساسية بالمعين الأساسي . حيث أنه لكل مصفوفة مربعة من القياس $m \times n$ ، $2^n - 1$ معيناً أساسياً .

المصفوفات الصغرى الأساسية الرئيسية :

نحصل عليها من المرتبة k للمصفوفة $m \times n$ بإهمال الأسطر $n-k$ الأخيرة والأعمدة المقابلة لها .

مثال : من المثال السابق نجد أن المصفوفة الصغرى الأساسية من المرتبة 2 هي

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

* **اختبار المصفوفة المعرفة الموجبة** : نقول عن مصفوفة أنها معرفة موجبة اذا تحقق :
1- يجب ان تكون كل العناصر القطرية موجبة تماماً .
2- يجب ان تكون كل المحددات الاساسية الرئيسية موجبة تماماً .

* **اختبار المصفوفة المعرفة شبه الموجبة** : نقول عن مصفوفة انها معرفة شبه موجبة اذا :
1- يجب أن تكون جميع العناصر القطرية غير سالبة (اي يمكن أن تساوي الصفر) .
2- يجب ان تكون محددات الاساسية الرئيسية غير سالبة .

ملاحظة : لاثبات ان مصفوفة Q معرفة سالبة أو شبه معرفة سالبة يكفي ان نثبت أن $-Q$ معرفة موجبة أو معرفة شبه موجبة .

* **المصفوفة الهيسية** (مصفوفة هيسيان) :
- ليكن لدينا التابع : $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ عندئذ :
- نعرف تدرج التابع f بالشكل :

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

- وتعطى مصفوفة هيسيان بالعلاقة :

$$H_{f(x_1, \ldots, x_n)} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \quad ; \quad i, j = \overline{1, n}$$

وهي مصفوفة مربعة ومتناظرة ذات الأبعاد $n \times n$.

- نستخدم هذه المصفوفة لاختبار تحدب وتقعر التابع :

اولاً : **اختبار تحدب تابع ما** : يكون التابع f تابع محدب اذا كانت مصفوفة هيسيان له معرفة موجبة أو شبه معرفة موجبة من اجل جميع القيم $x_1, \ldots, x_n$.

ثانياً : **اختبار تقعر تابع ما** : يكون f تابع مقعر اذا كانت مصفوفة هيسيان له معرفة سالبة أو شبه معرفة سالبة من اجل جميع قيم $x_1, \ldots, x_n$.

مثال: ليكن لدينا التابع:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 6x_1 - 4x_2 - 2x_3$$

اختبري فيما اذا كان التابع f محدب ام مقعر:

الحل: نقوم بايجاد مصفوفة هيسيان للتابع f كما يلي:

- ايجاد المشتقات الجزئية الاولى لـ f:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 6x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 6$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 4x_2 - 2x_1 - 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 2x_3 - 2x_1 - 2$$

- ايجاد المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} = 6 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = -2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = -2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} = 4 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} = -2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_3} = 2$$

$$\Rightarrow \quad H_{f(x_1, x_2, x_3)} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

⊙ عناصر القطر الرئيسي لهذه المصفوفة موجبة تماما.

⊙ المصفوفات الجزئية الاساسية الرئيسية

$$H \ \& \ [6] \ \& \ \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

نلاحظ ان محددات هذه المصفوفات الجزئية الاساسية الرئيسية $\{24 \ \& \ 6 \ \& \ 20\}$ موجبة تماماً.

وبالتالي فان مصفوفة هيسيان للتابع f مصفوفة معرفة موجبة اي ان التابع f تابع محدب.

* مضاريب لاغرانج :

اذا فرضنا ان البرنامج الرياضي هو أوجد القيمة الصغرى للتابع :

$$f_{(x)} \longrightarrow Min$$

$$g_i(x) = 0 \; ; \; i = \overline{1,m}$$ ضمن قيود المساواة

حيث $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

عندئذ يعطى تابع لاغرانج بالشكل :

$$L(x, \lambda_i) = f_{(x)} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$$

حيث λ_i قيم وسيطية و $i = 1, \dots, m$

عندما يبلغ تابع لاغرانج قيمة قصوى عند $\{x_j, \lambda_i\}$ فان التابع $f(x)$ يبلغ قيمة قصوى عندها .

حيث يبلغ L قيمة قصوى اذا كانت مشتقاته الجزئية بالنسبة للمتغيرات x_j, λ_i مساوية للصفر ، اي :

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \quad ; \quad j = \overline{1,n}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \quad ; \quad i = \overline{1,m}$$

- اذاً نحصل على $m+n$ معادلة بـ $m+n$ متحول . نقوم بحل هذه الجملة فنحصل على حل وليكن القيمة $\{x_j^*, \lambda_i^*\}$ ثم نقوم بتحديد نوع هذه القيمة .

* تكون قيمة قصوى لـ f (صغرى (عظمى)) اذا كان :
  - التابع f محدب (مقعر) .
  - شكل القيود منطقة حلول محدبة .

لتوضيح فكرة مضاريب لاغرانج (مسألة برمجة لاخطية مقيدة بقيود مساواة) .

مثال: اوجد القيمة الصغرى للتابع

$$f(x) = 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 6x_1 + 2x_2$$

مع مراعاة القيد : $$2x_1 - x_2 = 4$$

الحل : نلاحظ ان التابع ليس خطي اذاً المسألة مسألة برمجة لاخطية :

لدينا قيد واحد ، اذاً تابع لاغرانج هو ; $x = (x_1, x_2)$

$$L(x, \lambda) = 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 6x_1 + 2x_2 - \lambda(2x_1 - x_2 - 4)$$

/ /

نوجد المشتقات الجزئية لتابع لاغرانج بالنسبة للمتغيرات λ , x_1 , x_2 :

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 6x_1 + 2x_2 + 6 - 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 + 2x_1 + 2 + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -2x_1 + x_2 + 4 = 0$$

جملة معادلات بـ ٣ معادلات بـ ٣ مجاهيل

لحل جملة المعادلات السابقة نجد:

$$x_1^* = \frac{7}{11} \quad , \quad x_2^* = -\frac{30}{11} \quad , \quad \lambda^* = \frac{24}{11}$$

اذاً يجب ان التابع $f(x)$ يبلغ القيمة القصوى عند النقطة $\left\{ \frac{7}{11} , \frac{-30}{11} \right\}$

لتحديد نوعها نبين فيما اذا كان التابع f محدب ام مقعر وذلك من خلال مصفوفة هيسيان له كما يلي:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 6x_1 + 2x_2 + 6 \Longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} = 6 \quad \& \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 + 2x_1 + 2 \Longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 2 \quad \& \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} = 2$$

$$\Longrightarrow H = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن عناصر القطر الرئيسي موجبة تماماً و المحددات الصغرى الاساسية الرئيسية اكبر تماماً من الصفر

« حيث المصفوفات الصغرى الاساسية الرئيسية هي H و $[6]$ »

وبالتالي فإن مصفوفة هيسيان هي مصفوفة معرفة موجبة والتابع f تابع محدب القيد تابع خطي اذاً هو محدب ومقعر بآن معاً وعليه فإن القيمة هي تمثل قيمة صغرى محلية للتابع (لانه تابع محدب وقيد محدب) وبالتالي الحل الذي حصلنا عليه يحقق للتابع قيمة الصغرية : حيث ،

$$f(x_1^*, x_2^*) = 3,5454$$

ملاحظة : لايجاد القيمة العظمى للتابع نقوم بضربه بـ 1- ثم نقوم بايجاد القيمة الصغرى لهذا التابع الناتج

/ /

تمارين للتدريب :

$\boxed{1}$ اوجد القيمة الاصغرية للتابع :

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 + 5$$

مع مراعاة القيد : $g_1(x) = x_1 + x_2 = 4$

$\boxed{2}$ اوجد القيمة الاصغرية للتابع

$$f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$$

مع مراعاة القيد : $g_1(x) = x_1 - 2x_2 + 1 = 0$

الحل : ((ليس حل الدكتورة))

$\boxed{1}$ نلاحظ ان التابع f ليس خطي اذاً المسألة مسألة برمجة لاخطية :

تابع لاغرانج هو :

$$L(x, \lambda) = L(x_1, x_2, \lambda) = f(x) - \lambda\, g_1(x)$$
$$= x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 + 5 - \lambda(x_1 + x_2 - 4)$$

لنوجد المشتقات الجزئية لتابع لاغرانج :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= 2x_1 - 4 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= 2x_2 + 2 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= -x_1 - x_2 + 4 = 0 \end{aligned}\right\}$$

ثلاث معادلات بـ ثلاث مجاهيل .

بحل هذه الجملة نحصل على القيم :

$$x_1^* = \frac{7}{2} \quad , \quad x_2^* = \frac{1}{2} \quad , \quad \lambda^* = 3$$

ان التابع f يبلغ قيمة قصوى عند النقطة $\{\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\}$ لنحدد نوع هذه النقطة :

نجد ان مصفوفة هيسيان للتابع f هي :

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

نلاحظ ان عناصر القطر الرئيسي موجبة تماماً و محددات المصفوفات الصغرى الرئيسية الاساسية موجبة تماماً اذاً H معرفة موجبة ومنه التابع f تابع محدب و لدينا القيد خطي اذاً هو مقعر ومحدب بآن معاً وبالتالي فإن القيمة تمثل قيمة قصوى صغرى للتابع وعليه الحل الذي حصلنا عليه يحقق قيمة صغرى للتابع حيث

$$f(x_1^*, x_2^*) = 4,5$$

2 ان تابع الهدف هو: $f(x) = x_1^2 - 4x_1 + 4 + x_2^2 - 2x_2 + 1$

مسألة لاخطية - $= x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2 + 5$

مع مراعاة القيد: $g(x) = x_1 - 2x_2 + 1 = 0$

- نلاحظ أن تابع لاغرانج هو:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2 + 5 - \lambda(x_1 - 2x_2 + 1)$$

المشتقات الجزئية هي:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 4 - \lambda = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - 2 + 2\lambda = 0 \end{cases} \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -x_1 + 2x_2 - 1 = 0$$

جملة معادلات ب ٣ مجاهيل بحل هذه الجملة نحصل على الحل:

$$x_1^* = \frac{9}{5} \quad \text{و} \quad x_2^* = \frac{7}{5} \quad \text{و} \quad \lambda^* = -\frac{2}{5}$$

ان التابع f يبلغ قيمة قصوى عند النقطة $\left(\frac{9}{5}, \frac{7}{5}\right)$. لتحديد نوع هذه النقطة:

نوجد مصفوفة هيسيان للتابع f:

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$ مصفوفة معرفة موجبة،

وبالتالي فإن التابع f تابع محدب و القيد تابع خطي اذاً هو محدب ومقعر (آن معاً).

ومنه نجد أن القيمة القصوى للتابع f هي قيمة صغرى محلياً ... هذا الحل الذي حصلنا عليه يحقق لنا قيمة الصغرية للتابع ، هي:

$$f(x_1^*, x_2^*) = 0.2$$

Finished Lecture...