المحاضرة التاسعة عشرة — الخميس ١٤/٥/٢٠١٥م

أمثلة عن القياس

- أمثلة عن القياس:

- مثال (1): (قياس العد)

لتكن $X \neq \emptyset$ و $\mu : P(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$

$$\forall A \in P(X) : \mu(A) = \begin{cases} |A| & \text{if } A \text{ منتهية} \\ +\infty & \text{if } A \text{ غير منتهية} \end{cases}$$

حيث $|A|$ هو عدد عناصر المجموعة A .

مثال (2): (قياس ديراك)

لتكن $X \neq \emptyset$ ، $a \in X$ فإن:

$\mu_a : P(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$

$$\forall A \in P(X) : \mu_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{if } a \in A \\ 0 & \text{if } a \notin A \end{cases}$$

مثال (3): (القياس المعدود)

لتكن $X \neq \emptyset$ وغير معدودة حصراً والجبر التام على X كما يلي

$\mathcal{A} = \{A \in P(X) :$ A معدودة أو A^c معدودة $\}$

تمرين: أثبت أن $\mathcal{A}$ جبر على X

نعرف القياس المعدود بالشكل التالي:

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

$$\forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) = \begin{cases} 0 & A \text{ معدودة} \\ 1 & A^c \text{ معدودة} \end{cases}$$

تمرين: إذا كان $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء قياس و $B \subseteq X$

$$\mu_B : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

$$A \longmapsto \mu_B(A) = \mu(A \cap B)$$

ما ثبت أن:

$\boxed{1}$ $\mu_B(\emptyset) = 0$, $\boxed{2}$ $\forall \underset{i \in \mathbb{N}}{A_i} \in \mathcal{A} : \underset{i \neq j}{A_i \cap A_j} = \emptyset \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mu_B\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_B(A_i)$$

الحل:

① $\mu_B(\emptyset) = \mu(\emptyset \cap B) = \mu(\emptyset) = 0$

② $\mu_B\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_B(A_i) = \mu\left(B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right)$

$$= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i \cap B) \quad \mathrm{I}$$

$$\Rightarrow \mu_B\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i \cap B) \quad \#$$

توضيح للمساواة I:

كان $\underset{i \neq j}{A_i \cap A_j} = \emptyset$ أي A_i مجموعات منفصلة مثنى مثنى

$$\Rightarrow (A_i \cap B) \cap (A_j \cap B) = \emptyset$$

$$\Rightarrow A_1 \cap B, A_2 \cap B, \ldots, A_n \cap B, \ldots$$

مجموعات منفصلة مثنى مثنى ومنه

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \cap B)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_B(A_i)$$

تمرين ٢ : اذا كان $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء قياس فبرهن ان

① $\forall A, B \in \mathcal{A} \wedge \mu(A \Delta B) = 0 \Rightarrow \mu(A) = \mu(B)$

② $\forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$

حل تمرين سابعه بالمحاضرة السادسة عشرة :

$X = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad$ $T = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$

والمطلوب :

① هل T حلقة ,

لا تمثل T حلقة لانه $\emptyset \notin T$

② ما هي اصغر حلقة تحوي T : الجواب هو T_1 المعرف كما يلي

$T_1 = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}\}$

③ إن اصغر جبر يحوي T هو :

$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}, X, \{3, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{4\}\}$

④ إن اصغر طبولوجيا تحوي T هي :

$\tau = \{\emptyset, X, \{1, 2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}\}$

⑤ اكبر جبر من اجزاء X هو : $P(X)$ وعدد عناصر $P(X)$ هو $2^4 = 16$ حيث

$P(X) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\},$

$\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\},$

$, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{4\}, \emptyset, X\}$

⑥ أصغر جبر من اجزاء X هو $\{\emptyset, X\}$

حل تمرين 2 :

$\mu(A \triangle B) = 0$

$\mu((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) = 0 \Rightarrow$ بما ان μ قياس فإن

$(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$ و $\mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) = 0$

$\Rightarrow \mu(A \setminus B) = 0 \quad \text{and} \quad \mu(B\ A) = 0$

$\Rightarrow \mu(A \setminus B) = \mu(A \setminus (B \cap A)) = \mu(A) - \mu(A \cap B) = 0$

$\mu(B \setminus A) = \mu(B \setminus (A \cap B)) = \mu(B) - \mu(A \cap B) = 0$

$\Rightarrow \mu(A \cap B) = \mu(B) \ \wedge \ \mu(A \cap B) = \mu(A)$

$\Rightarrow \mu(A) = \mu(B)$

$* \ \mu(A \cup B) = \mu((A \setminus B) \cup B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B)$

$= \mu(A \setminus (A \cap B)) + \mu(B)$

$= \mu(A) - \mu(A \cap B) + \mu(B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.

انتهت المحاضرة !!!