المحاضرة السادسة

البرامج الأمثلية في $\mathbb{Z}$

- مسألة: يقوم مصنع بتصنيع نوعين من الأدوات الكهربائية، الربح في القطعة الوحدة من النوع الأول والثاني هو 50 ألف ل.س و 80 ألف ل.س على الترتيب، يعمل المصنع 36 ساعة أسبوعياً ويشتري 8 م٢ (8 متر مربع) من الحديد أسبوعياً، تحتاج القطعة الواحدة من النوع الأول والثاني إلى 3 ساعات عمل و مترين من الحديد و 8 ساعات عمل ومتر واحد من الحديد على الترتيب.

ما هو عدد القطع المفروض إنتاجها من النوعين لتحقيق أعلى ربح ؟

الحل: ليكن x_1 هو عدد القطع المنتجة من النوع الأول في الأسبوع

x_2 هو عدد القطع المنتجة من النوع الثاني في الأسبوع

ولننظر في شروط المسألة، **أولاً:** ساعات العمل

(ثلاث ساعات لكل قطعة من النوع الأول و 8 ساعات لكل قطعة من النوع الثاني) وعليه يكون

$$3x_1 + 8x_2 \leq 36 \ldots (1)$$

ثانيا: شرط الأمتار من الحديد $2x_1 + x_2 \leq 8 \ldots (2)$

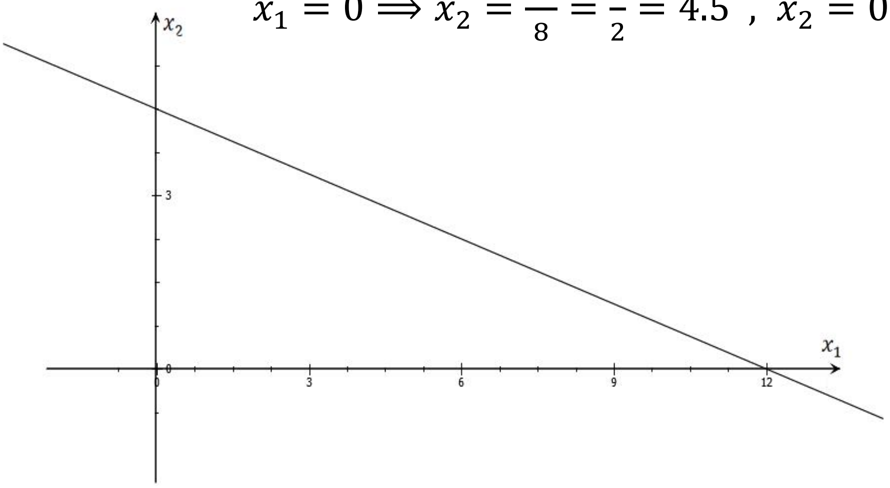
ويوجد أيضاً شرط عدم السلبية أي $x_1, x_2 \geq 0$ (عدد القطع لن يكونَ سالبا)

والهدف هو إيجاد أعظم قيمة للربح أي $\max f = 50x_1 + 80x_2$

ولنوجد أولاً منطقة الحلول:

1) من المتراجحة (1) نرسم المستقيم $3x_1 + 8x_2 = 36$

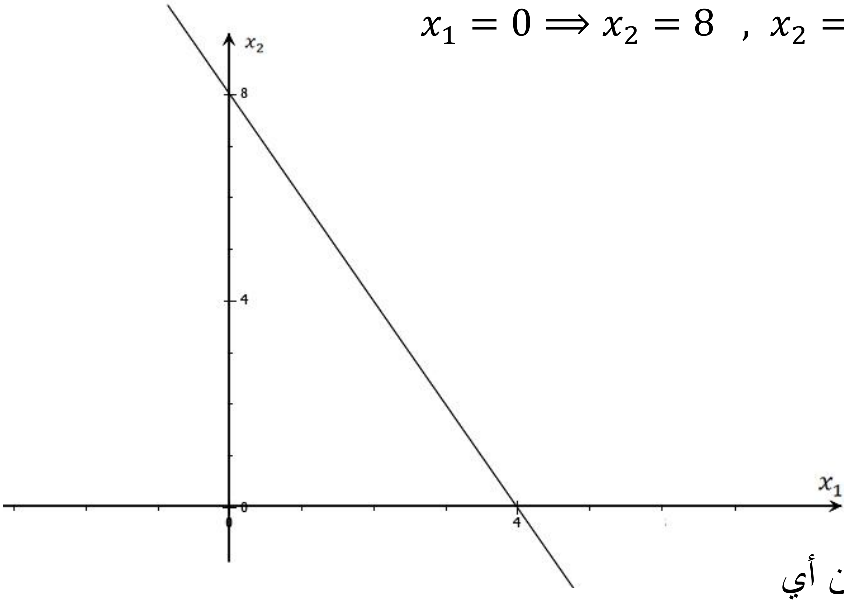
$$x_1 = 0 \Longrightarrow x_2 = \frac{36}{8} = \frac{9}{2} = 4.5 \ , \ x_2 = 0 \Longrightarrow x_1 = 12$$



والمنطقة التي تحقق المطلوب هي المنطقة المحصورة بين المحورين والمستقيم $3x_1 + 8x_2 = 36$ لأنَّ أي ثنائية (x_1, x_2) من هذه المنطقة ستحقق المتراجحة $3x_1 + 8x_2 \leq 36$

2) من المتراجحة (2) نرسم المستقيم $2x_1 + x_2 = 8$

$$x_1 = 0 \Longrightarrow x_2 = 8 \quad , \quad x_2 = 0 \Longrightarrow x_1 = 4$$



والمنطقة التي تحقق المطلوب هي المنطقة

المحصورة بين المحورين والمستقيم

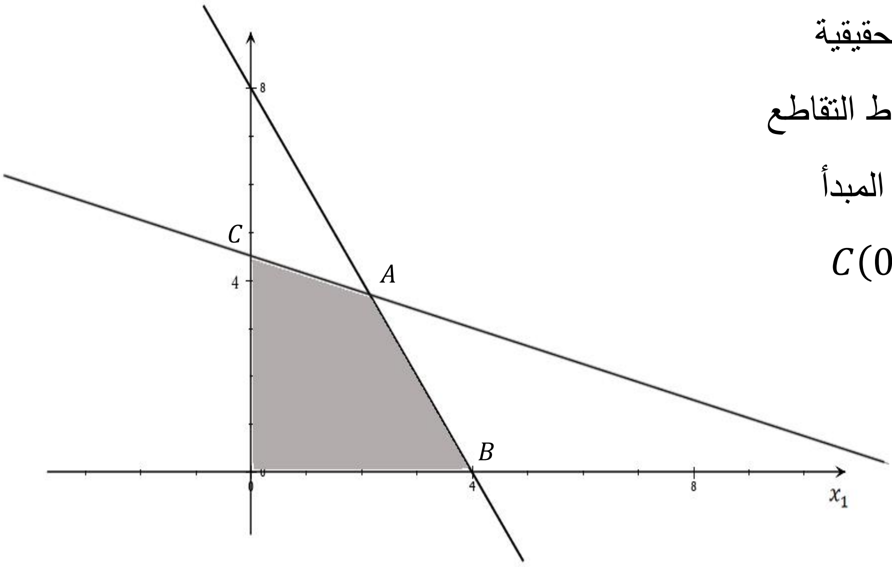
$$2x_1 + x_2 = 8$$

لأنَّ أي ثنائية (x_1, x_2) من هذه المنطقة

ستحقق المتراجحة

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

ومنه منطقة الحلول ستكون تقاطع المنطقتين أي



وهي المنطقة التي تمثل كل الحلول الحقيقية

والحل الأمثل الحقيقي يكون إحدى نقاط التقاطع

أي إما نقطة تقاطع المستقيمين A أو المبدأ

أو النقطة $B(4,0)$ أو النقطة $C(0,4.5)$

ولنوجد إحداثيات A وذلك بالحل

المشترك لمعادلتي المستقيمين

$$3x_1 + 8x_2 = 36$$
$$2x_1 + x_2 = 8$$

من المعادلة الثانية لدينا $x_2 = 8 - 2x_1$ نعوض في الأولى

$$3x_1 + 64 - 16x_1 = 36 \Longrightarrow -13x_1 = -28 \Longrightarrow x_1 = \frac{28}{13} = 2.15 \approx 2.2 \Longrightarrow x_2 = 3.7$$

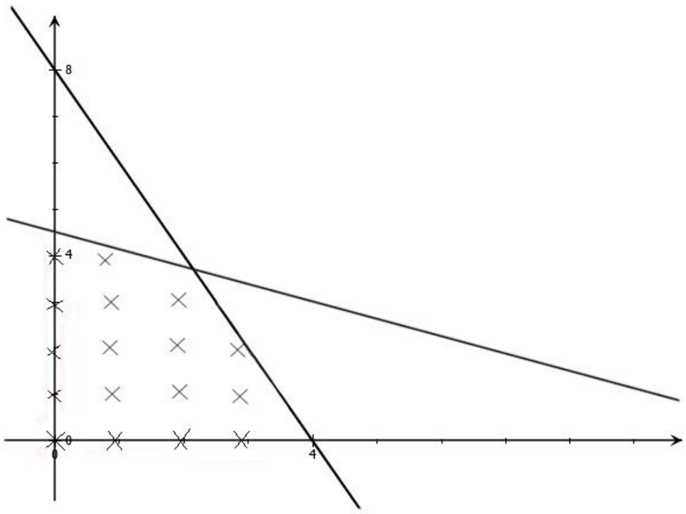
ولنبحث عن الحل الأمثل الحقيقي

$$f(0,0) = 0 \quad , \quad f(4,0) = 50(4) + 80(0) = 200$$
$$f(0,4.5) = 50(0) + 80(4.5) = 360$$
$$f(2.2,3.7) = 50(2.2) + 80(3.7) = 406$$

ومنه $\max f = 406$ أي الحل الأمثل الحقيقي هو $x_2 = 3.7 \;,\; x_1 = 2.2$ وقيمة دالة الهدف

عندها تكون 406

لكن هدفنا هو إيجاد الحل الأمثل الصحيح ولنأخذ من المنطقة كل الثنائيات الصحيحة والتي هي



$(0,0), (0,1), (0,3), (0,4)$
$(1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (1,4)$
$(2,0), (2,1), (2,2), (2,3)$
$(3,0), (3,1), (3,2)$
$(4,0)$

(أي ثنائية تقع في منطقة الحلول تحقق المتراجحتين (1) و (2) معاً)

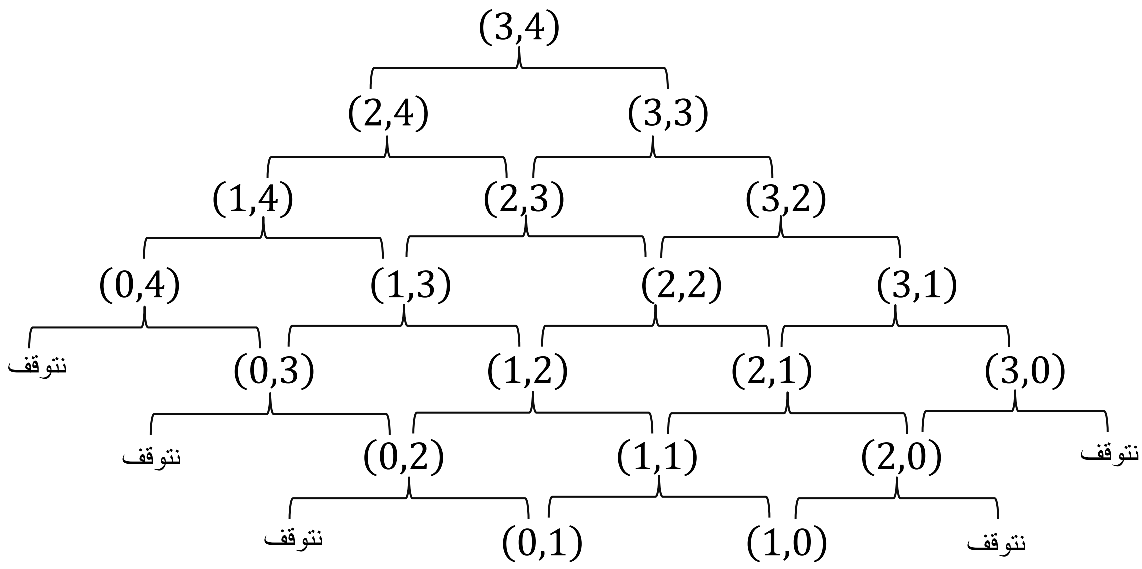
ولإيجاد الحل الصحيح سنعتمد

طريقة شجرة التفرع والحدود

والتي ستتوضح خوارزميتها خلال الحل

1) تحديد الحل الحقيقي (وهذا ما تم حسابه أولاً)

2) في حال كان الحل الأمثل الحقيقي هو حل صحيح نتوقف ويكون هو الحل المطلوب، أما إذا كان الحل حقيقي غير صحيح في دالة الهدف نأخذ أكبر عدد صحيح أكبر أو يساوي الحل الحقيقي لكل مسقط من مساقط الثنائية (x_1, x_2) ففي مثالنا هذا الحل حقيقي غير صحيح وهو $(2.2,3.7)$ وبالتقريب سنأخذ الثنائية $(3,4)$ وننشأ الشجرة بالشكل التالي



تنويه حول إنشاء الشجرة: بدأنا من $(3,4)$ وفي الفرع الأيسر لكل فرع نجري عملي -1 للمسقط اليساري وفي الفرع الأيمن نجري ذات العملية للمسقط الأيمن ونتوقف عند الوصول لآخر ثنائية في منطقة الحلول.

الشجرة الناتجة تضم حلول صحيحة ومن ضمن هذه الحلول يوجد الحل الأمثل الصحيح المبحوث عنه وبما أنَّ دالة الهدف max نبدأ من أعلى الشجرة نختبر أولاً فيما إذا كانت الثنائية ضمن منطقة الحلول ومن ثم نحسب قيمتها، نلاحظ أنَّ $(3,4)$ ليست في منطقة الحلول لأنها ستخل أحد الشرطين $3x_1 + 8x_2 \leq 36$ ، $2x_1 + x_2 \leq 8$ ننتقل للسطر الثاني فنجد أنَّ $(2,4)$ و $(3,3)$ أيضاً لا تحققا المتراجحتين معاً وننتقل للسطر الثالث

نلاحظ أنَّ $(1,4)$ تنتمي لمنطقة الحلول ولنوجد القيمة عندها $f(1,4) = 50 + 4 \times 80 = 370$

بما أنَّ دالة الهدف max وموجبة فكل ثنائية بالشجرة ناتجة عن تفرع لـ $(1,4)$ ستكون قيمتها في دالة الهدف أقل منها عند $(1,4)$ لذلك لا نختبر كل الحلول الناتجة عنها.

أيضاً $(2,3)$ تنتمي لمنطقة الحلول ولنوجد القيمة عندها $f(1,4) = 50 \times 2 + 3 \times 80 = 340$

وبالمثل لا نختبر كل الحلول الناتجة عنها وكذلك $(3,2)$ تنتمي لمنطقة الحلول ولنوجد القيمة عندها $f(1,4) = 3 \times 50 + 2 \times 80 = 310$ و لا نختر كل الحلول الناتجة عنها.

وهكذا نلاحظ أنه لا داعي للمتابع في باقي الشجرة (ملاحظة لا داعي لرسم كل الشجرة إذ يمكننا أن نحسب كل سطر فوراً وإن لزم المتابعة نشئ السطر أما إن وصلنا للقيمة فلا يهمنا تتمة الشجرة)

وبالتالي الحل الأمثل الصحيح هو $x_1 = 1, x_2 = 4$ وقيمة دالة الهدف هي 370.

تمرين: أوجد الحل الأمثل الحقيقي ومن ثم الصحيح للبرنامج الخطي التالي

$$\max f = 8w_1 + 5w_2$$
$$3w_1 - w_2 \leq 6 \quad , \quad w_1 + w_2 \leq 8 \quad , \quad 0 \leq w_1, w_2 \in \mathbb{Z}$$

انتهت المحاضرة ،،، عامر أبوبكر