تعريف: ليكن (X,d) فضاء متري و $A\subset X$ نقول أن المجموعة A مغلقة في X إذا كانت $A^c = X - A$ "المتممة" مجموعة مفتوحة في X.

ملاحظة/ لتكن (A_i) أسرة من المجموعات الجزئية "من مجموعة شاملة ما" ، "قوانين دي مورغان"

اجتماع المتممات $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$ متمم التقاطع

تقاطع المتممات $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$ متمم الاجتماع

مبرهنة/ في أي فضاء متري القضايا الآتية صحيحة:

1- تقاطع أي أسرة من المجموعات المغلقة هو مجموعة مغلقة

2- اجتماع عدد منتهٍ من المجموعات المغلقة هو مجموعة مغلقة

3- $\emptyset$, X مجموعات مغلقة.

البرهان: ليكن (X,d) فضاء متري

① لتكن (A_i) أسرة من المجموعات المغلقة في X ، للبرهان أن التقاطع مجموعة مغلقة ، حسب التعريف $\forall i\in I$ المجموعة A_i^c مفتوحة في X وبالتالي $\bigcup_{i\in I} A_i^c$ مجموعة مفتوحة في X ، ولما كان

$$\bigcup_{i\in I} A_i^c = \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c$$

فإن $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c$ مفتوحة في X ، ومنه فإن $\bigcap_{i\in I} A_i$ هي مجموعة مغلقة في X.

② لنفرض أن $B_1, B_2, \ldots, B_n$ مجموعات مغلقة في X
عندئذ $B_1^c, B_2^c, \ldots, B_n^c$ هي مجموعات مفتوحة في X
ومنه المجموعة $\bigcap_{i=1}^{n} B_i^c$ هي مجموعة مفتوحة في X ومنه
$(\bigcup_{i=1}^{n} B_i)^c$ مفتوحة في X.
وبالتالي المجموعة $\bigcup_{i=1}^{n} B_i$ مغلقة في X.

تعريف: ليكن (X, d) فضاء متري، $a \in X$ و $\varepsilon > 0$ نسمي المجموعة

$$B(a,\varepsilon) = \{x : x \in X , d(x,a) \le \varepsilon\}$$

كرة مغلقة في X مركزها a ونصف قطرها ε.

مبرهنة: في أي فضاء متري كل كرة مغلقة هي مجموعة مغلقة.

البرهان:
ليكن (X, d) فضاء متري و $B(a,\varepsilon)$ كرة مغلقة في X حيث
$a \in X$ لنبرهن على أن المجموعة $X - B(a,\varepsilon)$ مفتوحة في X
ليكن $b \in X - B(a,\varepsilon)$ عندئذ
$b \notin B(a,\varepsilon)$ ومنه
$d(a,b) > \varepsilon$
لنفرض أن $\varepsilon' = d(a,b) - \varepsilon > 0$ ، لنبرهن أن
$N(b,\varepsilon') \subset X - B(a,\varepsilon)$ مفتوحة
ليكن $x \in N(b,\varepsilon')$ عندئذ
$d(x,b) < \varepsilon' = d(a,b) - \varepsilon$

$$\Rightarrow d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b)$$

$$\Rightarrow d(a,x) \geq d(a,b) - d(x,b)$$

$$\Rightarrow d(a,x) \geq d(a,b) - \varepsilon'$$

$$\Rightarrow d(a,x) > d(a,b) - (d(a,b) - \varepsilon) = \varepsilon$$

ومنه

$$x \in X - B(a,\varepsilon)$$

ومنه $B(a,\varepsilon)$ مغلقة

تعريف: ليكن V فضاء شعاعي حقيقي نسمي كل تابع "نظيم" $_{\mathbb{R}}$

$$\|\_\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

نظيماً على V إذا حقق الشروط

$\forall a \in V \quad ; \|a\| \geq 0$

$\forall a \in V \quad ; \|a\| = 0 \iff a = 0$

$\forall B \in \mathbb{R} \quad , a \in V \quad ; \|B \cdot a\| = |B| \cdot \|a\|$

$\forall \; a, b \in V \quad ; \quad \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$

مبرهنة/ كل فضاء شعاعي حقيقي منظم هو فضاء متري

البرهان:

لنفرض أن $(V, \|\_\|)$ فضاء شعاعي حقيقي منظم.

لنعرف تطبيقاً بالشكل:

$$d : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall x, y \in V \;, \quad d(x,y) = \|x - y\|$$

(وظيفة تخضع الشروط الواردة في التعريف السابق) .

إن d تابع مسافة على V .
- النظيم يعرف مسافة ، المسافة ليس بالضرورة أن تعرف نظيم بل يجب شروط معينة :

المجموعات المغلقة في $\mathbb{R}$

/1/ كل مجال مغلق في $\mathbb{R}$ مجموعة مغلقة
ليكن $a, b \in \mathbb{R}$ إن $[a, b]$ مغلقة

$$[a, b]^c =]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$$

المتممة هي مجموعة مفتوحة "اجتماع مجموعتين كل منهم مفتوحة"

/2/ كل مجال من الشكل $]-\infty, a]$ ، $[a, +\infty[$ هي مجموعة مغلقة لأن

$$]-\infty, a]^c =]a, +\infty[$$

وهي مجموعة مفتوحة . والمجال الآخر نفس الشيء .

/3/ $[a, b[$ ليست مجموعة مغلقة

/4/ كل مجموعة منتهية هي مجموعة مغلقة

/5/ المجموعة الخالية العنصر هي مغلقة

المجموعة المشتقة

تعريف: ليكن (X,d) فضاء متري و A مجموعة جزئية غير خالية من X ولتكن $b\in X$.

نقول أن b نقطة حدية للمجموعة A إذا تحقق الشرط

$$\forall \varepsilon>0 \quad ; N(b,\varepsilon)\cap A \neq \phi$$
$$\neq \{b\}$$

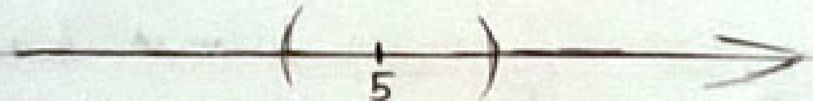
"لا يكفي جوار واحد كل كرة مركزها b يجب أن تتقاطع مع A على الأقل"

نرمز لمجموعة النقاط الحدية للمجموعة A بالشكل $D(A)$ وتسمى المجموعة المشتقة

مثال/

$$D(\mathbb{Z})=\phi$$

وذلك لو أخذنا نقطة من $\mathbb{Z}$ ولتكن 5 على المحور الحقيقي



لا تتقاطع مع المحور إلا بنقطة واحدة بحيث أنه من المفروض أن يكون التقاطع أكثر من نقطة

$$D(\mathbb{Q})=\mathbb{R}$$

$$D(]0,1])=[0,1]$$

/التعريف/ ليكن (X, d) فضاء متري و A مجموعة جزئية من X ،
الشروط الآتية متكافئة

① A مغلقة

② $D(A) \subseteq A$

البرهان:

① ← ② لنفرض أن A مغلقة في X ، لتكن $b \in D(A)$

نفرض جدلاً أن $b \notin A$ عندئذ $b \in A^c$

ولكون A^c مفتوحة فيوجد $\varepsilon > 0$ بحيث

$$N(b, \varepsilon) \subset A^c$$

$$N(b, \varepsilon) \cap A^c \ni b$$

$$N(b, \varepsilon) \cap A = \emptyset$$

وهذا تناقض إذاً $b \in A$

② ⟸ ① لنبرهن الآن A^c مفتوحة ، لتكن $a \in A^c$ عندئذٍ

$$A^c \subseteq X - D(A)$$

ومنه

$$a \in X - D(A)$$

وهذا يعني أن a ليست نقطة حدية للمجموعة A عندئذٍ يوجد

$\varepsilon > 0$ حيث

$$N(a,\varepsilon) \cap A = \phi$$
$$= \{a\}$$ أو

حالة ① - إذا كان

$$N(a,\varepsilon) \cap A = \phi$$

عندئذٍ $$N(a,\varepsilon) \subset A^c$$

ومنه A^c مفتوحة

حالة ② - $$N(a,\varepsilon) \cap A = \{a\}$$

وهذا يناقض كون $a \in A^c$

أي الحالة الأولى فقط

A^c مفتوحة وهكذا نجد أن A مغلقة .

الملاصقة :

تعريف : ليكن (X,d) فضاء متري ، ولتكن A مجموعة جزئية من X

غير خالية نقول عن $b \in X$ إنها نقطة ملاصقة

للمجموعة A إذا حققت الشرط :

$\forall \varepsilon > 0 \; ; \; N(b,\varepsilon) \cap A \neq \phi$

نرمز لمجموعة النقاط الملاصقة بالرمز $cl(A)$

ينتج من التعريف أن $A \subseteq cl(A)$

لأنه

$\forall b \in A \; , \; \forall \varepsilon > 0 \; ; \; N(b,\varepsilon) \cap A \neq \phi$

يحوي على الأقل نقطة واحدة وهي b نفسها.

تعريف/ ليكن (X,d) فضاء متري و A مجموعة جزئية من X عندئذ

$$cl(A) = A \cup D(A)$$

البرهان:

ليكن $b \in cl(A)$

لدينا حالتين - إذا كان $b \in A$ عندئذ فإن

$b \in A \cup D(A)$

- إذا كان $b \notin A$ عندئذ

$\forall \varepsilon > 0 \quad N(b,\varepsilon) \cap A \neq \phi$

$\neq \{b\}$

ومنه فإن $b \in D(A)$

وهكذا نجد أن $cl(A) \subseteq A \cup D(A)$

ليكن $d \in D(A)$ عندئذ من التعريف

$\forall \varepsilon > 0 \; ; \; N(d,\varepsilon) \cap A \neq \phi$

$\neq \{d\}$

ومنه $d \in cl(A)$; $A \cup D(A) \subseteq cl(A)$

تمرين/ لتكن (X, d) فضاء متري و A مجموعة جزئية من X
ان $cl(A)$ تساوي تقاطع جميع المجموعات المغلقة
في X والتي كل منها تحوي A وبالتالي فإنها تكون مغلقة.

البرهان