Subject: / /

نمذجة رياضية

المحاضرة الحادية والعشرون

ت: 15/5/18

ج) حالة متعددة الأبعاد ذات المؤثر الوحيد:

بالنسبة للتشكيل الرياضي لهذا النوع من المسائل فإنه لا يختلف عن الحالة السابقة كثيراً.

الفارق الوحيد هو أن تابع الحالة Z_i يكون مؤلفاً من قيمتين أو أكثر وذلك حسب عدد الأبعاد المؤثرة في اتخاذ القرار.

نوضح هذه الحالة من خلال المثال التالي:

مسألة: لدينا عناصر مسبقة الصنع (قد تكون براغي، عوالق ...) يراد نقلها بواسطة شاحنات سعة الواحدة منها 6 م^3 وحمولتها العظمى 12 طن يوجد 4 أنواع من هذه العناصر المراد نقلها مواصفاتها موضحة بالجدول التالي:

النوع	1	2	3	4
الحجم V_i (M^3)	3	2	3	2
الوزن W_i (t)	3	3	4	5
مردودية السفر الواحد $F_i(x_i)$	8	5	6	9

المطلوب: تحديد حمولة الشاحنة للعناصر الأربعة المذكورة أعلاه بحيث يكون المردود أعظمياً.

Scanned by CamScanner

Subject: / /

الحل: نفرض متحولات القرار:

x_1 عدد العناصر المنقولة من النوع الأول في الشاحنة.

x_2 عدد العناصر المنقولة من النوع الثاني في الشاحنة.

x_3 عدد العناصر المنقولة من النوع الثالث في الشاحنة.

x_4 عدد العناصر المنقولة من النوع الرابع في الشاحنة.

عندئذٍ لدينا الشرطان الآتيان:

شرط الحجم: $3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 6$

شرط الوزن: $3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 12$

- تأخذ x_1 قيمتها العظمى عندما يكون: $x_2 = x_3 = x_4 = 0$

عندئذٍ يصبح لدينا:

$$\begin{cases} 3x_1 \leq 6 \Rightarrow x_1 \leq 2 \\ 3x_1 \leq 12 \Rightarrow x_1 \leq 4 \end{cases}$$

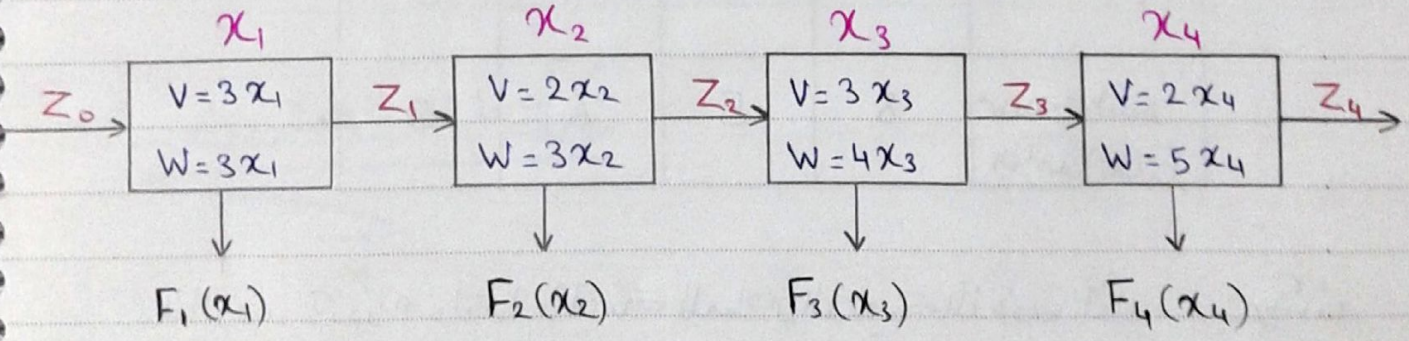
بالحل المشترك نجد أن: $x_1 \in \{0, 1, 2\}$

- بنفس الطريقة نجد أن:

$x_2 \in \{0, 1, 2, 3\}$

$x_3 \in \{0, 1, 2\}$ ، $x_4 \in \{0, 1, 2\}$

- يمكن التعبير عن خطوات الحل بالشكل التخطيطي التالي:



Scanned by CamScanner

Subject: / /

$$Z_1\begin{cases} V_1 = V_0 + 3x_1 \\ W_1 = W_0 + 3x_1 \end{cases}, \quad Z_2\begin{cases} V_2 = V_1 + 2x_2 \\ W_2 = W_1 + 3x_2 \end{cases}$$

$$Z_3\begin{cases} V_3 = V_2 + 3x_3 \\ W_3 = W_2 + 4x_3 \end{cases}, \quad Z_4\begin{cases} V_4 = V_3 + 2x_4 \\ W_4 = W_3 + 5x_4 \end{cases}$$

- معادلات الحل :

$$G_1^*(Z_1) = F_1(x_1)$$
$$G_2^*(Z_2) = \text{Max}\{F_2(x_2) + G_1^*(Z_1)\}$$
$$G_3^*(Z_3) = \underset{x_2}{\text{Max}}\{F_3(x_3) + G_2^*(Z_2)\}$$
$$G_4^*(Z_4) = \underset{x_3}{\underset{x_4}{\text{Max}}}\{F_4(x_4) + G_3^*(Z_3)\}$$

- إن مناقشة جميع الخيارات في المراحل Z_i أمر صعب، لذا عوضاً عن ذلك سنقوم بمعرفة الحالات التي ستواجهنا خلال الحل وما الخيارات هي فقط.
وسنبدأ في ذلك من المرحلة الأخيرة Z_4 حيث نعلم أن القيمة التي يأخذها تابع الحالة في المرحلة الأخيرة هي أعظم قيمة ممكنة، ويكون مقابلها قيم x_4 المتوفرة.

Z_4		x_4	Z_3	
V_4	W_4		V_3	W_3
6	12	0	6	12
		1	4	7
		2	2	2

وقد حصلنا على القيم في عمود Z_3 بالتعويض في توابع الحالة Z_4 كما يلي:

$$\left.\begin{matrix} V_4 = 6 \ \& \ x_4 = 0 \\ V_4 = V_3 + 2x_4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 6 = V_3 + 0 \Rightarrow V_3 = 6$$

$$\left.\begin{matrix} W_4 = 12 \ \& \ x_4 = 1 \\ W_4 = W_3 + 5x_4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 12 = W_3 + 5 \Rightarrow W_3 = 7$$

وهكذا...

Scanned by CamScanner

Subject: / /

Z_3	
V_3	W_3
6	12
4	7
2	2

إذا سنواجه القيم الآتية لـ Z_3 :

- الآن لنرَ حالات Z_2 التي ستواجهنا وذلك بمعرفة قيم Z_3 السابقة :

Z_3		x_3	Z_2	
V_3	W_3		V_2	W_2
6	12	0	6	12
		1	3	8
		2	0	4
4	7	0	4	7
		1	1	3
2	2	0	2	2

لقد وضعنا في عمود x_3 جميع قيم x_3 الممكنة والتي تتوافق مع قيمة Z_3.

فمثلاً : من أجل القيمة Z_3 لـ (4,7) لو كانت $x_3 = 2$

وعوضنا في معادلة الحالة : $V_3 = V_2 + 3x_3$

$4 = V_2 + 6$

فستكون V_2 سالبة وهذا مرفوض.

وقيم العمود Z_2 أيضاً من معادلات الحالة :

$$\begin{cases} V_3 = V_2 + 3x_3 \\ W_3 = W_2 + 4x_3 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

Subject: / /

Z_2	
V_2	W_2
6	12
3	8
0	4
4	7
1	3
2	2

ومنه سنواجه القيم التالية لـ Z_2 :

- أما بالنسبة لـ Z_1 فتكون لها حالة ابتدائية فإن :

$$Z_1 = x_1 + Z_0 = x_1$$

وبالتالي فإن قيم Z_1 هي الموافقة لقيم x_1 الممكنة ، حيث $x_1 \in \{0,1,2\}$

- إن كل ماسبق هو عبارة عن جداول مبدئية ، والآن نبدأ بالحل اعتماداً عليها :

* في المرحلة الابتدائية Z_1 :

Z_1		x_1	$G_1^*(Z_1)$
V_1	W_1		
0	0	0	0
3	3	1	8
6	6	2	16

العمود الأخير من معادلة الحل الأولى : $G_1^*(x_1) = F_1(x_1)$

حيث قيمة $F_1(x_1)$ تأتي حسب الخانة الأولى من السطر الأخير في الجدول المعطى .

Scanned by CamScanner

Subject: / /

* في المرحلة Z_2 :

$$\begin{cases} V_2 = V_1 + 2x_2 \\ W_2 = W_1 + 3x_2 \end{cases}$$

Z_2		x_2	Z_1		x_1^*	$F_2(x_2)$	$G_1^*(Z_1)$	$G_2(Z_2)$
V_2	W_2		V_1	W_1				
6	12	0	6	12	2	0	16	**16**
		1	4	9	1	5	8	13
		2	2	6	0	10	0	10
		3	0	3	0	15	0	15
3	8	0	3	8	1	0	8	**8**
		1	1	5	0	5	0	5
0	4	0	0	4	0	0	0	**0**
4	7	0	4	7	1	0	8	8
		1	2	4	0	5	0	5
		2	0	1	0	10	0	**10**
1	3	0	1	3	0	0	0	**0**
2	2	0	2	2	0	0	0	**0**

إن عمود x_1^* يأخذ في كل سطر أكبر قيمة ممكنة لـ x_1 بحيث تراعي قيم Z_1 ولا تتجاوزها. (حسب معادلات الحالة Z_1)

Scanned by CamScanner

Subject:

لننشئ جدولاً مختصراً لـ Z_2 ونضع فيه القيم الأمثلية فقط:

Z_2		x_2^*	$G_2^*(Z_2)$
V_2	W_2		
6	12	0	16
3	8	0	8
0	4	0	0
4	7	2	10
1	3	0	0
2	2	0	0

* في المرحلة Z_3:

$$\begin{cases} V_3 = V_2 + 3x_3 \\ W_3 = W_2 + 4x_3 \end{cases}$$

Z_3		x_3	Z_2		x_2^*	$F_3(x_3)$	$G_2^*(Z_2)$	$G_3(Z_3)$
V_3	W_3		V_2	W_2				
6	12	0	6	12	0	0	16	16
		1	3	8	0	6	8	14
		2	0	4	0	12	0	12
4	7	0	4	7	2	0	10	10
		1	1	3	0	6	0	6
2	2	0	2	2	0	0	0	0

لاحظ أن الأعمدة الثلاثة الأولى من الجدول السابق هي عبارة عن الجدول الابتدائي الذي أنشأناه لمعرفة قيم Z_2 التي ستواجهنا.

Scanned by CamScanner

Subject: / /

الجدول المختصر لـ Z_3 :

Z_3		x_3^*	$G_3^*(Z_3)$
V_3	W_3		
6	12	0	16
4	7	0	10
2	2	0	0

* في المرحلة Z_4 :

$$\begin{cases} V_4 = V_3 + 2x_4 \\ W_4 = W_3 + 5x_4 \end{cases}$$

Z_4		x_4	Z_3		x_3^*	$F_4(x_4)$	$G_3^*(Z_3)$	$G_4(Z_4)$
V_4	W_4		V_3	W_3				
6	12	0	6	12	0	0	16	16
		1	4	7	0	9	10	19
		2	2	2	0	18	0	18

كذلك فإن الأعمدة الثلاثة الأولى من الجدول السابق هي عبارة عن الجدول الابتدائي الذي أنشأناه لمعرفة قيم Z_3 التي سنأخذها

إن الحل الأمثل هو الموافق لـ :

$x_4 = 1$, $V_4 = 6$, $W_4 = 12$

$$\left.\begin{array}{l} V_4 = V_3 + 2x_4 \Rightarrow 6 = V_3 + 2 \Rightarrow V_3 = 4 \\ W_4 = W_3 + 5x_4 \Rightarrow 12 = W_3 + 5 \Rightarrow W_3 = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow x_3 = 0$$

وذلك من الجدول المختصر لـ Z_3 .

Scanned by CamScanner

Subject: / /

$$V_3 = V_2 + 3x_3 \Rightarrow 4 = V_2 + 0 \Rightarrow V_2 = 4$$
$$W_3 = W_2 + 4x_3 \Rightarrow 7 = W_2 + 0 \Rightarrow W_2 = 7$$
$$\Rightarrow \boxed{x_2 = 2}$$

من الجدول المختصر لـ Z_2.

$$V_3 = V_1 + 2x_2 \Rightarrow 4 = V_1 + 4 \Rightarrow V_1 = 0$$
$$W_2 = W_1 + 3x_2 \Rightarrow 7 = W_1 + 6 \Rightarrow W_1 = 1$$
$$\Rightarrow \boxed{x_1 = 0}$$

من القسم الرابع من جدول Z_2 الطويل.

ومنه فالحل الأمثل هو:

نقل 0 وحدة من النوع الأول في الشاحنة
نقل 2 وحدة من النوع الثاني في الشاحنة
نقل 0 وحدة من النوع الثالث في الشاحنة
نقل 1 وحدة من النوع الرابع في الشاحنة.

وستكون المردودية حينئذٍ: $G^* = 19$

نهاية المحاضرة الحادية والعشرون
والأخيرة ^_^

Scanned by CamScanner