الثلاثاء: 28/4/2015

المحاضرة السابعة (عملي):

- تمارين صفحة 116 -

$\frac{17}{117}$ أوجد أصغر عدد صحيح موجب باقي قسمته على 13 يساوي 5 وباقي قسمته على 12 يساوي 3 وباقي قسمته على 35 يساوي 2.

الحل:

35 ، 12,13 أولية مثنى مثنى

لجملة التطابق هل:

$$x \equiv 5 \pmod{13}$$
$$x \equiv 3 \pmod{12}$$
$$x \equiv 2 \pmod{35}$$

$m_1 = 13 \ , \ m_2 = 12 \ , \ m_3 = 35$

$m = m_1 . m_2 . m_3 = 5460$

$M_1 = (12).(35) = 420$

$M_2 = 455 \qquad , \qquad M_3 = 156$

$420. \ m_1' \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow m_1' \equiv -3 \pmod{13}$

$455 \ m_2' \equiv 1 \pmod{12} \Rightarrow m_2' \equiv -1 \pmod{12}$

$156 \ m_3' \equiv 1 \pmod{35} \Rightarrow m_3' \equiv 11 \pmod{35}$

$$x \equiv 420(5)(-3) + 455(3)(-1) + 156(2)(11) \pmod{5460}$$

$\Rightarrow x \equiv -4233 \pmod{5460}$

$\Rightarrow$ ~~$x \equiv 4233 \pmod{5460}$~~

$\Rightarrow \quad x \equiv 1227 \pmod{5460}$

c) $\frac{18}{117}$ أوجد الحل المشترك لكل من جمل التطابقات التالية:

(1) $5x \equiv 2 \pmod{13}$, (2) $x \equiv 2 \pmod{35}$

(3) $3x \equiv 13 \pmod{77}$, (4) $x \equiv 7 \pmod{20}$

الحل:

لدينا: $35 = 7 \times 5$, $77 = 7 \times 11$, $20 = 5 \times 4$

$$(2) \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 2 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow x \equiv 3 \pmod{13}$$

$$(3) \Rightarrow x \equiv 30 \pmod{77} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 30 \equiv 2 \pmod{7} \\ x \equiv 30 \equiv 8 \pmod{11} \end{cases}$$

$$(4) \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 7 \equiv 3 \pmod{4} \\ x \equiv 7 \equiv 2 \pmod{5} \end{cases}$$

الجملة المعطاة تكافئ الجملة التالية:

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv 3 \pmod{13} \\ x \equiv 2 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \\ x \equiv 8 \pmod{11} \\ x \equiv 3 \pmod{4} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \equiv 3 \pmod{4} \\ x \equiv 2 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \\ x \equiv 8 \pmod{11} \\ x \equiv 3 \pmod{13} \end{array}\right.$$

نلاحظ أن جميع المقاسات أولية مثنى مثنى

المقاسات: $13, 5, 7, 11, 4$ أولية مثنى مثنى

$$m = 4 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 = 20020$$

$$M_1 = 5 \times 7 \times 11 \times 13 = 5005$$

$M_2 = 4 \times 7 \times 11 \times 13 = 4004$
$M_3 \equiv 4 \times 5 \times 11 \times 13 = 2860$
$M_4 = 4 \times 5 \times 7 \times 13 = 1820$
$M_5 = 4 \times 5 \times 7 \times 11 = 1540$

نحسب النظائر:

$5005\, m_1' \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow m_1' \equiv 1 \pmod 4$
$4004\, m_2' \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow m_2' \equiv -1 \pmod 5$
$2860\, m_3' \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow m_3' \equiv 2 \pmod 7$
$1820\, m_4' \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow m_4' \equiv -2 \pmod{11}$
$1540\, m_5' \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow m_5' \equiv -2 \pmod{13}$

الحل المشترك للجملة:

$$x \equiv \sum_{i=1}^{5} a_i m_i' M_i \pmod{20020}$$

$$\equiv 1 \times (5005) \times 1 - 1 \times 2 \times 4004 + 2 \times 2 \times 2860$$
$$- 2 \times 8 \times 1820 - 2 \times 3 \times 1540 \pmod{20020}$$

$$x \equiv 26455 - 46368 \equiv -19913 \pmod{20020}$$
$$\equiv 107 \pmod{20020}$$

$\frac{7}{116}$) إذا كان $(a,35)=1$ أثبت أن $a^{12} \equiv 1 \pmod{35}$

الحل:

$(a,7)=1,\ (a,5)=1 \Leftarrow 35 = 5 \times 7$

حسب فيرما $a^4 \equiv 1 \pmod 5$
$a^{12} \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow 5 \mid a^{12}-1$

$$a^{6} \equiv 1 \pmod 7$$

$$a^{12} \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow 7 \mid a^{12} - 1$$

$$(7,5) = 1 \Rightarrow 7 \times 5 \mid a^{12} - 1$$

$$a^{12} \equiv 1 \pmod{35}$$

$\frac{11}{116}$ إذا كان $(n,30)=1$ أثبت أن 240 يقسم n^4+239

الحل:

n عدد فردي لأنه إذا لم يكن فردي لم يتحقق الفرض:

$$240 = 16 \times 3 \times 5$$

$$n^2 = 8M + 1 \Rightarrow n^4 = 64M^2 + 6M + 1$$

$$n^2 \equiv 1 \pmod{2^3} \Leftrightarrow$$ n فردي

$$n^{2^{2^{1}}} \equiv 1 \pmod{2^{3+1}}$$

$$(1) \quad n^4 \equiv 1 \pmod{16}$$

$n^2 \equiv 1 \pmod 3$ حسب فيرما $(3,n)=1$

$$(2) \quad n^4 \equiv 1 \pmod 3$$

$(3) \quad n^4 \equiv 1 \pmod 5$ حسب فيرما $(5,n)=1$

من (1) و(2) و(3):

$$n^4 \equiv 1 \pmod{16 \times 3 \times 5}$$

$$n^4 \equiv -239 \pmod{240}$$

$$240 \mid n^4 + 239$$

$\frac{18}{117}$) أوجد الحل المشترك لكل من جمل التطابقات التالية:

d) $17x \equiv 3 \pmod 7$, $17x \equiv 3 \pmod 5$

$17x \equiv 3 \pmod 2$, $17x \equiv 3 \pmod 3$

الحل:

$$17x \equiv 3 \pmod 2 \Rightarrow x \equiv 1 \pmod 2$$
$$17x \equiv 3 \pmod 3 \Rightarrow x \equiv 3 \pmod 3$$
$$17x \equiv 3 \pmod 5 \Rightarrow x \equiv 4 \pmod 5$$
$$17x \equiv 3 \pmod 7 \Rightarrow x \equiv 1 \pmod 7$$

المقاسات 2, 5, 3, 7 أولية مثنى مثنى، الجملة حل بالمقاس:

$$m = m_1 \times m_2 \times m_3 \times m_4 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$$

$$M_1 = 105 , \quad M_2 = 70 , \quad M_3 = 42 , \quad M_4 = 30$$

$$105 m_1' \equiv 1 \pmod 2 \Rightarrow m_1' \equiv 1 \pmod 2$$
$$70 m_2' \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow m_2' \equiv -2 \pmod 3$$
$$42 m_3' \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow m_3' \equiv -2 \pmod 5$$
$$30 m_4' \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow m_4' \equiv -3 \pmod 7$$

نعوض في الحل:

$$x \equiv \sum_{i=1}^{4} a_i m_i' M_i \pmod{210}$$

$$\equiv (1)(1)(105) - (2)(3)(70) - (2)(4)(42) - (3)(1)(30) \pmod{210}$$

$$x \equiv -741 \pmod{210} \equiv -531 \pmod{210}$$
$$x \equiv -321 \pmod{210} \equiv -111 \pmod{210}$$
$$\Rightarrow x \equiv 99 \pmod{210}$$

انتهت المحاضرة ----