حلول عددية

المحاضرة الخامسة عشرة

١٤/٥/٢٠١٥م

طريقة ADM لحل المعادلات التفاضلية

سوف نقتصر في دراستنا على استخدام هذه الطريقة في حل المعادلات التفاضلية العادية الخطية.

خطوات الطريقة:

1) لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الخطية العادية:

$$Lu = R(u) + g$$

حيث أن L مؤثر تفاضلي يمثل المشتق من أعلى مرتبة في المعادلة التفاضلية
وحيث $R(u)$ تابع خطي لـ u قد يحوي مشتقات من مرتبة أدنى من مرتبة L
وحيث g حد غير متجانس.

2) نأخذ المؤثر العكسي للمؤثر التفاضلي L وليكن L^{-1}.

حيث إذا كان L هو المشتق من المرتبة الأولى فإن L^{-1} هو $\int_0^x$
وإذا كان L هو المشتق من المرتبة الثانية فإن L^{-1} هو $\int_0^x\int_0^x$
وهكذا...

نطبق المؤثر العكسي L^{-1} على طرفي المعادلة:

$$L^{-1}(Lu) = L^{-1}(R(u)) + L^{-1}(g)$$

$$u = f + L^{-1}(R(u)) \quad \boxed{1}$$

حيث أن f هي الدالة الناتجة من مكاملة g ومن الاستفادة من الشروط المعطاة مع المعادلة.

3) نفرض الحل u على شكل متسلسلة غير منتهية من المركبات كالتالي:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad \boxed{2}$$

4) نعوض $\boxed{2}$ في $\boxed{1}$ فنحصل على:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = f + L^{-1}\left(R\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\right)$$

وللتبسيط يمكننا كتابة العلاقة الأخيرة بالشكل:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots = f + L^{-1}\left(R(u_0 + u_1 + u_2 + \cdots)\right)$$

وبما أن R مؤثر خطي فإن:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots = f + L^{-1}(R(u_0)) + L^{-1}(R(u_1)) - \cdots$$

5) نفرض $u_0 = f$ أي نفرض المركبة الصفرية هي كل ما في الطرف الثاني في العلاقة الأخيرة و L^{-1} لا يؤثر عليه.

الآن بالمقارنة بين الطرفين نجد:

$$u_1 = +L^{-1}(R(u_0))$$
$$u_2 = +L^{-1}(R(u_1))$$
$$u_3 = +L^{-1}(R(u_2))$$
$$\vdots$$

وهكذا تكون العلاقة التكرارية العامة هي:

$$\boxed{u_{k+1} = +L^{-1}(R(u_k))} \; ; \quad k \geq 0$$

Subject:

مثال: أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية باستخدام طريقة ADM :

$$u'(x) = u(x) \qquad ; \; u(0) = A$$

الحل: بإمكاننا كتابة المعادلة السابقة بالشكل:

$$Lu = u \qquad \boxed{1}$$

حيث أن L مؤثر تفاضلي معطى كالتالي: $L = \frac{d}{dx}$

وبالتالي فإن مؤثره العكسي L^{-1} معرف كالتالي:

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^x (\cdot)\, dx$$

- والآن نطبق المؤثر العكسي L^{-1} على طرفي المعادلة $\boxed{1}$:

$$L^{-1}(Lu) = L^{-1}(u)$$

وبما أن $Lu = u'$ فإن:

$$L^{-1}(u') = L^{-1}(u)$$

$$\int_0^x u'(x)\, dx = L^{-1}(u)$$

$$[u(x)]_0^x = L^{-1}(u)$$

$$u(x) - u(0) = L^{-1}(u)$$

ولكن لدينا $u(0) = A$ وبالتالي:

$$\boxed{u(x) = A + L^{-1}(u)} \quad \star$$

- نفرض الحل من الشكل:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

نعوض في $\star$ فنحصل على:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = A + L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\right)$$

Subject: / /

وبالتالي فإن العلاقة التكرارية للمركبات هي :

$$\begin{cases} u_0 = A \\ u_{k+1} = L^{-1}(u_k) \quad ; k \geq 0 \end{cases}$$

* $u_1 = L^{-1}(u_0) = \int_0^x A\,dx = Ax$
* $u_2 = L^{-1}(u_1) = \int_0^x Ax\,dx = A\frac{x^2}{2!}$
* $u_3 = L^{-1}(u_2) = \int_0^x A\frac{x^2}{2!}\,dx = A\frac{x^3}{3!}$

ونتابع بنفس الأسلوب فيكون الحل :

$$u(x) = A + Ax + A\frac{x^2}{2!} + A\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$u(x) = A\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)$$

وبالاستفادة من منشور الدالة الأسية نجد أن :

$$u(x) = A e^x$$

Subject:

مثال: أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية باستخدام طريقة ADM :

$$u''(x) = x\,u(x)$$

حيث : $u(0) = A \quad , u'(0) = B$

(تدعى هذه المعادلة Airy's equation)

الحل: يمكن كتابة المعادلة بالشكل : $\boxed{1}$ $\quad Lu = xu$

حيث L مؤثر تفاضلي معطى كالتالي : $L = \dfrac{d^2}{dx^2}$

وبالتالي فإن مؤثره العكسي معرف كالتالي :

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^x \int_0^x (\cdot)\, dx\, dx$$

والآن نطبق المؤثر العكسي على طرفي المعادلة $\boxed{1}$:

$$L^{-1}(Lu) = L^{-1}(xu)$$

$$L^{-1}(u''(x)) = L^{-1}(xu)$$

$$\int_0^x \int_0^x u''(x)\, dx\, dx = L^{-1}(xu)$$

$$\int_0^x [u'(x)]_0^x\, dx = L^{-1}(xu)$$

$$\int_0^x [u'(x) - u'(0)]\, dx = L^{-1}(xu)$$

$$[u(x) - x\,u'(0)]_0^x\, dx = L^{-1}(xu)$$

$$u(x) - u(0) - [x\,u'(0) - \underbrace{0 \times u'(0)}_{0}] = L^{-1}(xu)$$

Subject: / /

ولكن لدينا من شروط المسألة: $u(0) = A$, $u'(0) = B$

$$\Rightarrow u(x) - A - Bx = L^{-1}(xu)$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x) = A + Bx + L^{-1}(xu)} \quad *$$

- نفرض الحل من الشكل: $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$

نعوض في * فنحصل على:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = A + Bx + L^{-1}\left(x \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\right)$$

وبالتالي فإن العلاقة التكرارية للمركبات هي:

$$\begin{cases} u_0 = A + Bx \\ u_{k+1} = L^{-1}(x u_k) \quad ; k \geq 0 \end{cases}$$

* $u_1 = L^{-1}(x u_0) = \int_0^x \int_0^x (Ax + Bx^2)\,dx\,dx$

$$u_1 = \int_0^x \left[A\frac{x^2}{2} + B\frac{x^3}{3}\right] dx = A\frac{x^3}{6} + B\frac{x^4}{12}$$

* $u_2 = L^{-1}(x u_1) = \int_0^x \int_0^x \left(A\frac{x^4}{6} + B\frac{x^5}{12}\right) dx\,dx$

$$u_2 = \int_0^x \left[A\frac{x^5}{30} + B\frac{x^6}{72}\right] dx = A\frac{x^6}{180} + B\frac{x^7}{504}$$

ونتابع بنفس الأسلوب فيكون الحل:

$$u(x) = A + Bx + A\frac{x^3}{6} + B\frac{x^4}{12} + A\frac{x^6}{180} + B\frac{x^7}{504} + \cdots$$

$$u(x) = A\left(1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + \cdots\right) + B\left(x + \frac{x^4}{12} + \frac{x^7}{504} + \cdots\right)$$

انتهت المحاضرة الخامسة عشرة والأخيرة