/ /

منطق ترجيحي

المحاضرة الثانية عشرة

٣/٥/٢٠١٥

تعاريف:

- عدد عناصر المجموعة الترجيحية:

لتكن A مجموعة ترجيحية جزئية من المجموعة الشاملة نسبياً X، حيث:

$$X = \{x_1, x_2, ----, x_n\}$$

عندئذٍ:

$$card(A) = \mu_A(x_1) + \mu_A(x_2) + ---- + \mu_A(x_n)$$

- المجموعة الترجيحية الخالية:

تكون المجموعة الترجيحية A الجزئية من المجموعة الشاملة نسبياً X مجموعة خالية إذا تحقق:

$$\forall x \in X \quad : \quad \mu_A(x) = 0$$

مثال: لتكن $X = \{1,2,3\}$ ولتكن: $A = \left\{\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{3}\right\}$

عندئذٍ A مجموعة ترجيحية خالية.

- المجموعة الترجيحية الطبيعية:

تكون المجموعة الترجيحية A الجزئية من المجموعة الشاملة نسبياً X مجموعة طبيعية إذا وُجد على الأقل عنصراً $x \in X$ بحيث تكون درجة عضويته (انتمائه) لـ A تساوي الواحد، أي:

$$\exists x \in X \; ; \; \mu_A(x) = 1$$

- حذف α : (α_cut)

ليكن $]0,1] \ni \alpha$ ، وليكن A مجموعة ترجيحية جزئية من مجموعة شاملة نسبياً X

عندئذٍ نرمز لحذف α للمجموعة A بالرمز A_α ، ويكون :

$$A_\alpha = \{x \in X \ ; \ \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

مثال: لتكن المجموعة الترجيحية التالية :

$$A = \left\{\frac{1}{a} , \frac{0.3}{b} , \frac{0.2}{c} , \frac{0.3}{d} , \frac{0}{e}\right\}$$

إن المجموعة A هي مجموعة ترجيحية طبيعية لأن :

$$\exists\, a \in X \ ; \ \mu_A(a) = 1$$

ولكنها ليست مجموعة ترجيحية خالية .

لنحسب عدد عناصرها :

$$\text{card}(A) = 1 + 0.3 + 0.2 + 0.3 + 0 = 1.8$$

أما كأمثلة على حذف α للمجموعة A :

$A_1 = \{a\}$, $A_{0.3} = \{a, b, d\}$

$A_{0.8} = \{a\}$, $A_{0.2} = \{a, b, c, d\}$

- بعض العمليات الحسابية على المجموعات الترجيحية :

لتكن A مجموعة ترجيحية جزئية من المجموعة الشاملة نسبياً X

وليكن α عدداً ما ، عندئذٍ :

$$\alpha A = \left\{\frac{\alpha\, \mu_A(x)}{x} \quad \forall x \in X\right\}$$

$$A^\alpha = \left\{\frac{(\mu_A(x))^\alpha}{x} \quad \forall x \in X\right\}$$

في المثال السابق :

$$0.5\, A = \left\{\frac{0.5}{a} , \frac{0.15}{b} , \frac{0.1}{c} , \frac{0.15}{d} , \frac{0}{e}\right\}$$

$$A^2 = \left\{\frac{1}{a} , \frac{0.09}{b} , \frac{0.04}{c} , \frac{0.09}{d} , \frac{0}{e}\right\}$$

- قاعدة المجموعة الترجيحية:

لتكن A مجموعة ترجيحية جزئية من المجموعة الشاملة نسبياً X .

نعرف قاعدة المجموعة الترجيحية A كالتالي:

$$Support(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}$$

- نواة المجموعة الترجيحية:

لتكن A مجموعة ترجيحية جزئية من المجموعة الشاملة نسبياً X .

نعرف نواة المجموعة الترجيحية A كالتالي:

$$Core(A) = \{x \in X ; \mu_A(x) = 1\}$$

في المثال السابق:

$$support(A) = \{a, b, c, d\}$$
$$core(A) = \{a\}$$

مثال: لتكن المجموعة الترجيحية B:

$$B = \left\{ \frac{0.6}{a}, \frac{0.9}{b}, \frac{0.1}{c}, \frac{0.3}{d}, \frac{0.2}{e} \right\}$$

$$support(B) = \{a, b, c, d, e\}$$
$$core(B) = \Phi = \{ \}$$

/ /

العلاقات الترجيحية:

تعريف: لتكن X, Y مجموعتين غير خاليتين، عندئذٍ نعرّف العلاقة الترجيحية R فيما بينهما بأنها مجموعة ترجيحية جزئية من $X \times Y$ (الجداء الديكارتي) كالتالي:

$$R: X \times Y \longrightarrow [0, 1]$$

بحيث يكون لكل زوج (x, y) من $X \times Y$ عدد يتراوح بين الصفر والواحد يقيس العلاقة بين x و y.

وتعطى العلاقة الترجيحية على شكل مصفوفة قيمها من المجال $[0, 1]$

مثال: لتكن لدينا المجموعتان:

$X = \{John, Jim, Bill\}$

$Y = \{Fred, Mike, Sam\}$

ولتكن العلاقة: $R: X \times Y \longrightarrow [0, 1]$

التي يقيس مقدار التشابه بين الأشخاص (علاقة التشابه الترجيحي) وتمثل بالمصفوفة التالية:

R	Fred	Mike	Sam
John	0.2	0.8	0.5
Jim	0.9	0.3	0.0
Bill	0.6	0.4	0.7

مثال: لتكن لدينا المجموعة $U = \{1, 2, 3\}$ ولنعرف العلاقة الترجيحية التالية:

علاقة التساوي تقريباً، كالتالي: $R: U \times U \longrightarrow [0, 1]$

حيث:

$$R(u, v) = \begin{cases} 1 & ; u = v \\ 0.8 & ; |u - v| = 1 \\ 0.3 & ; |u - v| = 2 \end{cases}$$

وبالتالي نحصل على المصفوفة التالية:

R	1	2	3
1	1	0.8	0.3
2	0.8	1	0.8
3	0.3	0.8	1

/ /

العمليات على العلاقات الترجيحية:

1) **التقاطع:** لتكن R, S علاقتين ترجيحيتين على المجموعة الشاملة نسبياً $X \times Y$ حيث:

$$S : X \times Y \longrightarrow [0,1]$$

$$R : X \times Y \longrightarrow [0,1]$$

عندئذٍ يعرف تقاطع العلاقتين S, R كما يلي:

$$(R \wedge S)(u,v) = \min\{R(u,v), S(u,v)\}$$

2) **الاجتماع:** لتكن R, S علاقتين ترجيحيتين على المجموعة الشاملة نسبياً $X \times Y$ حيث:

$$S : X \times Y \longrightarrow [0,1]$$

$$R : X \times Y \longrightarrow [0,1]$$

عندئذٍ يعرف اجتماع العلاقتين S, R كما يلي:

$$(R \vee S)(u,v) = \max\{R(u,v), S(u,v)\}$$

مثال: لتكن لدينا العلاقة الترجيحية R التي تمثل أن x يعتبر أكبر من y.
ولتكن العلاقة الترجيحية S التي تمثل أن x قريب جداً من y، حيث:

$$R : X \times Y \longrightarrow [0,1] \quad , \quad S : X \times Y \longrightarrow [0,1]$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 & 0.7 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0.9 & 1 & 0.7 & 0.8 \end{bmatrix} , \quad S = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0.9 & 0.6 \\ 0.9 & 0.4 & 0.5 & 0.7 \\ 0.3 & 0 & 0.8 & 0.5 \end{bmatrix}$$

أوجد $R \wedge S$ ، $R \vee S$.

الحل: لتمثيل العلاقة أن x يعتبر أكبر من y و x قريب جداً من y:

$$R \wedge S = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0.1 & 0.6 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.7 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Subject: / /

ولتمثيل العلاقة أن x يعتبر أكبر من y أو x قريب جداً من y :

$$R \vee S = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.9 & 0.7 \\ 0.9 & 0.8 & 0.5 & 0.7 \\ 0.9 & 1 & 0.8 & 0.8 \end{bmatrix}$$

تركيب علاقتين ترجيحيتين :

لتكن X, Y, Z ثلاث مجموعات ، ولتكن A, B مجموعتين ترجيحيتين معرفتين كما يلي :

$$A : X \times Y \longrightarrow [0,1]$$

$$B : Y \times Z \longrightarrow [0,1]$$

عندئذٍ نعرف تركيب العلاقتين A, B ونرمز له بـ $A \circ B$ (والذي يشبه ضرب المصفوفات) كما يلي :

$$A \circ B : X \times Z \longrightarrow [0,1]$$

بحيث كل عنصر من $A \circ B$ يمكن إيجاده كالتالي :

$$Max[Min(a_{ik}, b_{kj})] \quad \forall k \in |Y| \;, \forall i \in |X| \;, \forall j \in |Z|$$

مثال: لتكن العلاقتين الترجيحيتين :

$$R : X \times Y \longrightarrow [0,1]$$

$$S : Y \times Z \longrightarrow [0,1]$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 & 0.7 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0.9 & 1 & 0.7 & 0.8 \end{bmatrix} , \quad S = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.9 & 0.3 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0.9 & 0.3 & 0.8 \\ 0.6 & 0.7 & 0.5 \end{bmatrix}$$

عندئذٍ فإنه :

$$R \circ S : X \times Z \longrightarrow [0,1]$$

$$R \circ S = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0.5 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0.7 & 0.9 & 0.7 \end{bmatrix}$$

انتهت المحاضرة الثانية عشرة