المحاضرة الثالثة عشرة..

الأحد 2015/5/3

تمرين:

برهن أنَّ $\mathcal{J}=\{[\alpha,\infty[\,,\ \alpha\in\mathbb{R}\}$ يولد جبر بوريل ؟

جبر بوريل في $\mathbb{R}$ " هو أصغر جبر تام يحوي صف المجالات المفتوحة"
فهو يحوي المجموعة المفتوحة $]-\infty,\alpha[$ إذن سيحوي متممتها $[\alpha,\infty[$
إذن $\mathcal{J}_b \subseteq \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ وبالتالي $\hat{\mathcal{J}}_b \subseteq \mathcal{B}$

لتكن A أي مجموعة بوريلية، نريد إثبات أنَّ A تنتمي إلى الجبر التام $\hat{\mathcal{J}}_b$
ويكفي لتحقيق ذلك أن يكون : $]a,b[^c =]-\infty,a]\cup[b,\infty[$
إنَّ $[b,\infty[$ ينتمي إلى $\mathcal{J}_b \subseteq \hat{\mathcal{J}}_b$
وإنَّ

$$]-\infty,a] = (]a,\infty[)^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}[a+\frac{1}{n},\infty[\right)^c$$

إذن $]-\infty,a]$ ينتمي إلى $\hat{\mathcal{J}}_b$.

برهن أنَّ $\mathcal{J}=\{]-\infty,\alpha]\,,\ \alpha\in\mathbb{R}\}$ يولد جبر بوريل ؟
$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ جبر بوريل في $\mathbb{R}$ "هو أصغر جبر تام يحوي صف المجالات المغلقة"
فهو يحوي المجموعة المغلقة $]-\infty,\alpha]$ مهما تكن α.
إذن $\mathcal{J}\subseteq\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ وبالتالي $\hat{\mathcal{J}}\subseteq\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

$$]a,b[^c =]-\infty,a]\cup[b,+\infty[$$

إنَّ $]-\infty,a]$ ينتمي إلى $\mathcal{J}\subseteq\hat{\mathcal{J}}$

وإنَّ : $[b,+\infty[^c =]-\infty,b[= \bigcup_{n=1}^{\infty}]-\infty, b-\frac{1}{n}]$
إذن $[b,+\infty[$ ينتمي إلى $\hat{\mathcal{J}}$

تمرين:

إذا كان $(X, \mathcal{B})$ فضاءً قيوسياً و E , F مجموعتان كيفيتان من X

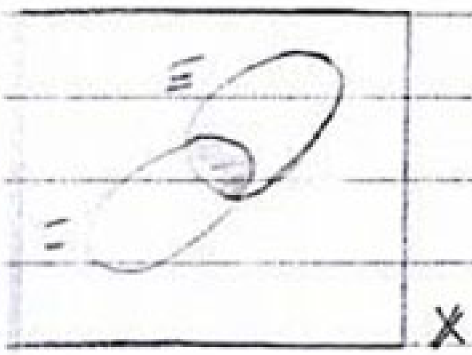
أثبت أنه $\forall x \in X$ فإنَّ:

$$\chi_{E\cup F}(x) = \max\{\chi_E(x) , \chi_F(x)\} \quad *$$

• إذا كانت $x \notin E \cup F$ فإنَّ:

$$\chi_{E\cup F}(x)=0 \;,\; \chi_E(x)=0 \;,\; \chi_F(x)=0$$

فالمساواة * محققة.



• إذا كانت $x \in E - F$ فإنَّ:

$$\chi_{E\cup F}(x)=1 \;,\; \chi_E(x)=1 \;,\; \chi_F(x)=0$$

فالمساواة * محققة.

• إذا كانت $x \in E \cap F$ فإنَّ:

$$\chi_{E\cup F}(x)=1 \;,\; \chi_E(x)=1 \;,\; \chi_F(x)=1$$

فالمساواة * محققة.

إذا كان μ مقياساً على X و $\mu(A)=7$ ، $\mu(B)=8$ حيث A و B منفصلين

فاحسب $\int_X \max\{\chi_A , \chi_B\}\, d\mu$.

إنَّ $\max\{\chi_A , \chi_B\} = \chi_{A\cup B}$

$$\int \chi_{A\cup B}\, d\mu = \mu(A\cup B) = \mu(A)+\mu(B)-\underbrace{\mu(A\cap B)}_{0} = 15$$

احسب $\int_X |\chi_A - \chi_B| \, d\mu$.

إنَّ $\chi_{A\Delta B} = |\chi_A - \chi_B| = \chi_A + \chi_B - 2\chi_{A\cap B}$

$= 15$

انظر إلى التدريب صفحة 75.

مفهوم الدالة المميزة: ملحق م صفحة ١٦٧ في الكتاب.

إذا كان $E \subseteq X$ فنضع:

$$\chi_E = 1_E \quad : X \to \{0,1\}$$

$$\chi_E(x) = 1 \quad \text{if } x \in E$$

$$\chi_E(x) = 0 \quad \text{if } x \notin E$$

يسمى χ_E دالة المجموعة E أو كاشف E أو الدالة المميزة لـ E.

برهن أنّ:

1. $E \subseteq F \Rightarrow \chi_E \leqslant \chi_F$

2. $\chi_{E\cap F} = \chi_E \cdot \chi_F$

3. $\chi_{E\cup F} = \chi_E + \chi_F - \chi_E \cdot \chi_F$

4. $\chi_{E\cup F} = \max\{\chi_E, \chi_F\}$

5. $\chi_{A\Delta B} = |\chi_A - \chi_B| = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A \cdot \chi_B$

6. $\chi_{\cup A_n} = \sup_{n\geqslant 1} \chi_{A_n}$

7. $\chi_{\cap A_n} = \inf_{n\geqslant 1} \chi_{A_n}$

ملحق ب. النهاية العليا والنهاية الدنيا لمتتالية من المجموعات:

صفحة ١٦٨ إذا كانت $A_1, \dots, A_n, \dots$ متتالية من أجزاء مجموعة غير خالية X

$$x \in A^* = \overline{\lim}(A_n) = \limsup (A_n)$$
$$= \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k$$
$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

$$x \in A_* = \underline{\lim}(A_n) = \liminf (A_n)$$
$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

يكون للمتتالية نهاية إذا كان $A^* = A_*$ ونكتب $\lim A_n = A^* = A_*$

$$\overline{\lim}\, \chi_{A_n} = \chi_{\overline{\lim} A_n} \quad , \quad \underline{\lim}\, \chi_{A_n} = \chi_{\underline{\lim} A_n}$$

سؤال دورة: 2011 / 2010.

اذكر نص مبرهنة لوبيغ الأولى ثم استخدمها لإثبات مايلي.

أ- أثبت أنه إذا كان $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء القياس μ، وكل المجموعات فيما يلي قيوسة، وكانت $\dots \subseteq U_2 \subseteq U_1$ و أنّ $U_n \nearrow U$ (U_n تتزايد إلى U) فإنّ μ مستمر من الأدنى عند U.

ب- وأثبت أنه إذا كانت $\dots \supseteq V_2 \supseteq V_1$ وأنّ $V_n \searrow V$ وأنّه من أجل قيمة ما $n \geq 1$ يكون $\mu(V_n) < \infty$ فإنّ μ مستمر من الأعلى عند V.

الحل:

مبرهنة لوبيغ الأولى:

$$\text{if } (f_n) \nearrow f \Rightarrow \int f_n \nearrow \int f$$

لدينا $\dots \subseteq U_n \subseteq \dots \subseteq U_1$ مجموعات قيوسة

ومنه $U_n \to U = \bigcup U_n$

نضع: $f_n = \chi_{U_n}$

وبالتالي: $f_1 = \chi_{U_1}$, $f_2 = \chi_{U_2}$, ...

$f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n \leq \dots$

نلاحظ أنّ هذه المتتالية متتالية متزايدة من الدوال القيوسة.

$f_n \nearrow f = \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n}$

حسب لوبيغ الأولى: $\int f_n \, d\mu \nearrow \int f \, d\mu$

$\int f_n \, d\mu = \int \chi_{U_n} \, d\mu = \mu(U_n)$

$\mu(U_n) \to \mu(U)$ #

ملاحظة: مبرهنة التقارب المتناقص
إذا كانت لدينا $\{g_n\}_{n\geq 1}$ متتالية متناقصة من الدوال القيوسة

$g_n \searrow g \Rightarrow \int g_n \searrow \int g$

مع الشرط $\int g_1 < \infty$
$g_1 \geq 0$

البرهان:
لنضع $h_1 = g_1 - g_1 \geq 0$
$h_2 = g_1 - g_2 \geq 0$
$h_3 = g_1 - g_3 \geq 0$
$\vdots$
$h_n \nearrow h = g_1 - g$

$$\int h_n \longrightarrow \int h$$

$$\int (g_1 - g_n) \longrightarrow \int (g_1 - g)$$

$$\int g_1 - \int g_n \longrightarrow \int g_1 - \int g \qquad \int g_1 < \infty$$ حيث

$$\int g_n \longrightarrow \int g$$ وبالتالي

وتبرهن (ب) حسب هذه الخاصة.

سؤال دورة : 2010 / 2011 .

اذكر نص توطئة فاتو، دون برهان ثم استخدمها لإثبات أنّ:

أثبت أنه إذا كانت $f_1, f_2, \ldots$ متتالية من التوابع القيوسة الموجبة وكانت هذه المتتالية متزايدة وكان $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ فإنّ f تطبيق مقيوس وأنّ $\int f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu$

إذا كانت (f_n) متتالية من التطبيقات القيوسة الموجبة فإنّ:

$$\int \underline{\lim}\, f_n \leq \underline{\lim} \int f_n \qquad (1)$$

أي أنّ تكامل النهاية الدنيا للمتتالية (f_n) لا يتجاوز النهاية الدنيا لمتتالية التكاملات .

لنأخذ مجموعة الدوال المتزايدة

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_n \leq \cdots$$

$$\underline{\lim}\, f_n = f = \lim f_n$$ "لأنها متزايدة"

$$= \sup (f_n)$$ "تبلغ حدها الأعلى"

$$f_n \leq f$$ بما أنها متزايدة

$$\int f_n \leq \int f$$

$$\lim \int f_n = \underline{\lim} \int f_n \leq \int f \qquad (2)$$

من (1) و (2) نجد أنّ :

$$\lim \int f_n = \int f$$

انتهت المحاضرة 13...