المحاضرة الحادية عشرة ..

الأحد 2015/4/26 ..

مبرهنة أساسية :

لنفرض أنّ $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء القياس μ و أن $f \geq 0$ تطبيق قيوس على X و E مجموعة قيوسة . نعرف التطبيق ν بالقاعدة التالية :

$$E \to \nu(E) = \int_X \chi_E f \, d\mu$$

حيث μ قياس موجب معرف على $\mathcal{A}$

برهن أنّ ν قياس موجب .

$$1- \nu(\emptyset) = \int_\emptyset f \, d\mu = \int_X \chi_\emptyset f \, d\mu = \int_X 0 \, d\mu = 0$$

2- لنأخذ A, B مجموعتان قيوستان ومنفصلتان

$$\nu(A \cup B) \overset{?}{=} \nu(A) + \nu(B)$$

$$\nu(A \cup B) = \int_{A \cup B} f \, d\mu = \int_X (\chi_{A \cup B}) \, d\mu = \int_X (\chi_A + \chi_B) f \, d\mu$$

$$= \int_X (\chi_A f + \chi_B f) \, d\mu$$

$$= \int_X (\chi_A f) \, d\mu + \int_X (\chi_B f) \, d\mu$$

$$= \nu(A) + \nu(B)$$

3- لنأخذ $A_1, \dots, A_n$ منفصلة مثنى مثنى وحيث $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

$$\nu(A) \overset{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$$

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \int_{\cup A_n} f \, d\mu = \int_X (\chi_{\cup A_n} f) \, d\mu$$

نلاحظ أنّ : $\underset{n=1}{\overset{\infty}{\sqcup}} A_n \quad \chi_{\sqcup A_n}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x)$

إذاً : $\nu(\sqcup A_n) = \int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}\right) f \, d\mu$

$$= \int_X \sum_{n=1}^{\infty} (\chi_{A_n} f) \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \chi_A f \, d\mu$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$$

وبالتالي يكون ν قياس موجب.

ونسميه عندئذٍ قياس مولد بـ f أو دالة كثافته f.

وهذا القياس يتمتع بالخاصة التالية:

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu = \int_X (\chi_E f) \, d\mu$$

3-94 إذا كان g ، f قيوسين وموجبين $(f \geq 0, g \geq 0)$ في الفضاء $(X, \mathcal{B}, \mu)$ فإنّ :

$$\int_X (f+g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$$

الحل :

لو كان f و g درجتين فإنّ المساواة السابقة صحيحة

لنفرض أنّ f و g قيوسان وموجبان

حسب لوبيغ (1) :
$$\exists \varphi_n : \varphi_n \nearrow f \Rightarrow \int \varphi_n \nearrow \int f$$

$$\exists \psi_n : \psi_n \nearrow g \Rightarrow \int \psi_n \nearrow \int g$$

$$\varphi_n + \psi_n \nearrow f+g$$

وبالتالي حسب لوبيغ (1) :

النهاية إن وجدت فهي وحيدة

$$\left.\begin{aligned} &\int_X (\varphi_n + \psi_n) \to \int_X (f+g) \\ &\int_X \varphi_n + \int_X \psi_n \to \int_X f + \int_X g \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int_X (f+g) = \int_X f + \int_X g$$

"مبرهنة التقارب المتزايد"

نتيجة:

إذا كانت $(f_n)_{n\geq 1}$ متتالية من التطبيقات القيوسة الموجبة فإن:

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu$$

يكفي أن نلاحظ أن:

$$\int_X \sum_{n=1}^{m} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{m} \int_X f_n \, d\mu \qquad , \forall m \geq 1$$

فإذا وضعنا $h_m = \sum_{n=1}^{m} f_n = f_1 + \dots + f_m$ كانت المتتالية $(h_m)_{m\geq 1}$ متتالية متزايدة من التوابع القيوسة الموجبة نهايتها $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = h$

عندما m تسعى إلى $+\infty$.

نطبق مرة ثانية مبرهنة التقارب المتزايد فنجد:

$$\int_X h \, d\mu = \lim_{m\to\infty} \int_X h_m \, d\mu = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \left(\int_X f_n \, d\mu \right)$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu \right)$$

94/5. إذا كان f و g كموليين وموجبين فإن:

$$\int_X (f-g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu - \int_X g \, d\mu$$

إذا كان f موجب وكمول و g كذلك فإن $h = f - g$ كمول.

$$h = f - g$$

$$h^+ - h^- = f - g \quad \Rightarrow \quad \underbrace{h^+ + g}_{\text{مجموع تابعين موجبين}} = \underbrace{f + h^-}_{\text{مجموع تابعين موجبين}}$$

وبالتالي:

$$\int_X (h^+ + g) = \int_X (f + h^-) \Rightarrow \int_X h^+ + \int_X g = \int_X f + \int_X h^-$$

$$\Rightarrow \int_X h = \int_X h^+ - \int_X h^- = \int_X f - \int_X g$$

. إذا كان السؤال بالشكل :

. f و g تابعين كمولين، فإننا نكتب:

$$h = f - g$$

$$h^+ - h^- = (f^+ - f^-) - (g^+ - g^-)$$

. ونتابع بنفس الطريقة.

. ملاحظة : التمارين صفحة ٩٤ جميعها هامة..

. مبرهنة أساسية :

١- إذا كان $g \geq f \geq 0$ وكان g, f قيوسين فإنّ:

$$\int_X f\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu$$

2- إذا كان $g \geq f$، وكان $\int_X g\, d\mu$ و $\int_X f\, d\mu$ كمولين فإنّ:

$$\int_X f\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu$$

3- من أجل أي تطبيق قيوس f فإنّ:

$$\left|\int_X f\, d\mu\right| \leq \int_X |f|\, d\mu$$

. الإثبات :

. لدينا $f \leq |f|$ وبالتالي حسب (1) $\int f \leq \int |f|$

و $-f \leq |f|$ وبالتالي حسب (1) $-\int f = \int -f \leq \int |f|$

$$\Rightarrow \left|\int f\, d\mu\right| \leq \int |f|\, d\mu$$

٤. f كمول إذا وفقط إذا كان f^+, f^- كمولين

انتهت المحاضرة الحادية عشرة