تعريف:

- نقول بأن المتنوعة الأفينية V مختزلة (reducible) إذا وفقط إذا كانت:
V قابلة لأن تكتب بالشكل: $V = V_1 \cup V_2$ حيث كل من V_1 & V_2 متنوعات أفينية بحيث $V \neq V_1$ & $V \neq V_2$.
- وإذا لم تكن V مختزلة فإننا نسميها متنوعة غير مختزلة (irreducible).

أي أن:

V غير مختزلة إذا تحقق ما يلي:

$V = V_1 \cup V_2$ فإن $V_1 = V$ أو $V_2 = V$.

مثال: هل $V(x^2 - y^2)$ في $\mathbb{R}^2$ مختزلة أم غير مختزلة؟!

الحل: $x^2 - y^2 = (x-y).(x+y)$ ومنه

$$V(x^2 - y^2) = V(x-y) \cup V(x+y)$$

ومنه فهي مختزلة.

مبرهنة:

لتكن $V \subset K^n$ متنوعة أفينية عندئذٍ:

V غير مختزلة $\Longleftrightarrow$ $I(V)$ مثالي أولي. (هامة)

المطلوب والمحذوف والمضاف على المقرر: هام

م ٢ ص ٤

أعطى الدكتور تمرين على الملاحظة $\boxed{3}$:

أوجد $GCD(x^6 - 1, x^4 - 1)$ في $\mathbb{R}$ وظيفة (13-1)

أي:

أوجد القاسم المشترك للحدوديتان.

م٣ ص٧ : مصفوفات الترتيب لـ glex و lex و grL محذوفة.

م٣ ص٨ : المثال مهم.

م٤ ص١ و ص٣ : أمثلة مهمة.

م٥ ص١ : المبرهنة محذوف برهانها أما نصها مطلوب.

م٦ ص١ و ص٦ التمارين مهمة

إضافة في م٤ :

ملاحظة :

إن كلاً من القطوع المخروطية (الزائد والناقص والمكافئ) والدائرة تعتبر متنوعات أفينية كما أن منحنيات كثيرات الحدود هي أيضاً متنوعات أفينية.

حيث أن بيان الدالة $y = f(x)$ هو $V(y - f(x))$.

كما أن منحنيات الدوال الكسرية هي أيضاً متنوعات أفينية. مثل التمرين 3-8 الوظيفة

حيث كان $y = \frac{x^3-1}{x}$ ومنه $yx = x^3 - 1$ ومنه $yx - x^3 - 1 = 0$ وهو بجبرهن

$V(yx - x^3 - 1)$

م١٥ ص١ : التعريف بالتركيز مهم.

م١٥ ص٣ :

هنالك مثال كان على الدكتور أن يورده بعد المبرهنة الأولى من ص٣ هو كالتالي :

لتكن حلقة كثيرات الحدود $\mathbb{R}[x]$ ، وليكن المثاليان

$I = \langle x+1, x-3 \rangle$ & $J = \langle x+1 \rangle$

مثاليات في هذه الحلقة

بين فيما إذا كان $I \subset J$ أو $J \subset I$ ثم استنتج العلاقة بين $V(J)$ & $V(I)$

ثم أكد صحة ذلك بحساب كلاً منها.

وظيفة (13-2).

/ /

م١٢٣ ص3، الوظيفة (12-1) حذفها الدكتور لأننا لم نأخذ k^2 ولا نعرف كيف نتعامل معها.

ملاحظة:

- جميع الملاحظات الواردة مهمة للفهم وللصح والخطأ.
- المبرهنة ص3 بالحاشية العاشرة الواردة بنص:

" كل مثالي $I \subset K[x_1,\dots,x_n]$ يملك مجموعة مولدات منتهية أي يوجد $g_1,\dots,g_s \in I$ بحيث $I = \langle g_1,\dots,g_s \rangle$ "

اسمها مبرهنة هلبرت الأساسية أعتذر عن نسيان كتابة اسمها.

- الأدوات الإضافية (الهندسة الإسقاطية) مطلوبة امتحانياً.

انتهى المقرر بعون الله تعالى

رحاب مطهرية

ملاحظة هامة:

أضاف الدكتور بعض المرئيات بعنوان الهندسة الإسقاطية وهو مطلوب امتحانياً.

سيتم انزاله إن شاء الله باسم ملحق للهندسة الجبرية

مع تمنياتي بالتخرج والنجاح

/ /

حل وظيفة م 13:

13-1:

أوجد $GCD(x^6-1, x^4-1)$ في $\mathbb{R}$.

نلاحظ أن

$$*)\quad x^4-1 = (x^2-1)(x^2+1)$$
$$= (x-1)(x+1)(x^2+1)$$

$$*)\quad x^6-1 = (x^3-1)(x^3+1)$$
$$= (x-1)(x^2+x+1)\cdot(x+1)(x^2-x+1).$$

ومنه

$GCD(x^6-1, x^4-1) = x^2-1$ وهذا يفيدنا عند تطبيق الملاحظة 3 صفحة 4 م 2:

وبالتالي:

$$\langle x^6-1, x^4-1\rangle = \langle x^2-1\rangle$$

13-2:

$\forall f\in J:\ f = \alpha(x+1)$ و $\alpha\in \mathbb{R}[x]$

$= \alpha(x+1)+0(x-3) \in I \implies J\subset I$

حسب المبرهنة الواردة بـ م3 ص105:

$V(I)\subset V(J)$ نتأكد من ذلك حالياً:

نلاحظ أن $J = \langle x+1\rangle$ ومنه $V(J) = \{-1\}$.

$I = \langle x+1, x-3\rangle$ ومنه $V(I) = \phi$ ومنه

$V(I)\subset V(J)$ (لأن $\phi\subseteq\{-1\}$)

Rehab

تطبيق المحاضرة السادسة: نقلتها من احدى الزميلات.

I] من أجل $\underset{lex}{x > y}$:

$\boxed{f_1 = 2x - y^2}$ $\boxed{f_2 = x^2 + y^2 - 1}$

$$S(f_1, f_2) = \frac{x^2}{2x} f_1 - \frac{x^2}{x^2} f_1 = -\frac{1}{2} x y^2 - y^2 + 1$$

$$\begin{array}{r|l} & -\frac{1}{4} y^2 \\ \hline f_1 = 2x - y^2 & -\frac{1}{2} \cancel{x} y^2 - y^2 + 1 \\ & -\frac{1}{2} \cancel{x} y^2 + \frac{1}{4} y^4 \\ & \text{— — — — —} \\ & -\frac{1}{4} y^4 - y^2 + 1 \end{array}$$

$$S(f_1, f_2) \longrightarrow -\frac{1}{2} x y^2 - y^2 + 1$$

$$\boxed{f_3 := -\frac{1}{4} y^4 - y^2 + 1}$$

نفرض $G := \{f_1, f_2, f_3\}$

$$S(f_1, f_3) = \frac{xy^4}{2x} f_1 - \frac{xy^4}{-\frac{1}{4} y^4} f_3 = \frac{y^4}{2} f_1 + 4x \quad f_3$$

$$= x y^4 - \frac{y^6}{2} \quad - x y^4 - 4x y^2 + 4x$$

$$= -4x y^2 + 4x - \frac{y^6}{2}$$

(1) التقسيم على f_1

$$\begin{array}{r|l} & -2y^2 + 2x \\ \hline f_1 = 2x - y^2 & -4\cancel{x}y^2 + 4x - \frac{y^6}{2} \\ & -4\cancel{x}y^2 + 2y^4 \\ & \text{— — — — —} \\ & \cancel{4x} - \frac{y^6}{2} - 2y^4 \\ & \cancel{4x} - 2y^2 \\ & \text{— — — — —} \\ & -\frac{1}{2} y^6 - 2y^4 + 2y^2 \end{array}$$

(2) تقسيم الباقي على f_3

$$\begin{array}{r|l} & 2y^2 \\ \hline f_3 & -\frac{1}{2} y^6 - 2y^4 + 2y^2 \\ & -\frac{1}{2} y^6 - 2y^4 + 2y^2 \\ & \text{———} \\ & 0 \end{array}$$

ومنه

$$S(f_1, f_3) \xrightarrow{G} 0$$

$$S(f_2,f_3)=\frac{x^2y^4}{x^2}f_2-\frac{x^2y^4}{-\frac{1}{4}y^4}f_3=-4x^2y^2+4x^2+y^6-y^4$$

① بالتقسيم على f_2

$$\begin{array}{r|l} & -4y^2+4 \\ \hline f_2=x^2+y^2-1 & -4x^2y^2+4x^2+y^6-y^4 \\ & \underline{-4x^2y^2-4y^4+4y^2} \\ & 4x^2+y^6+3y^4-4y^2 \\ & \underline{4x^2+4y^2-4} \\ & y^6+3y^4-8y^2+4 \end{array}$$

② بالتقسيم على f_3

$$\begin{array}{r|l} & -4y^2+4 \\ \hline f_3 & y^6+3y^4-8y^2+4 \\ & \underline{y^6+4y^4-4y^2} \\ & -y^4-4y^2+4 \\ & \underline{-y^4+4y^2+4} \\ & 0 \end{array}$$

ومنه

$$S(f_2,f_3)\xrightarrow{G}_{+}0$$

ومنه فإن $G=\{f_1,f_2,f_3\}$ تشكل قاعدة غروبنر للمثالي.

• نلاحظ أن $LP(f_1)$ يقبل القسمة على $LP(f_2)$ ومنه نحذف f_1 من القاعدة.
كما أن $LC(f_3)\neq 1$ ومنه نضرب f_3 بـ -4 فتكون قاعدة غروبنر الأصغرية:

$$G=\{f_2,-4f_3\}$$

نلاحظ $f_2\xrightarrow{-4f_3}f_2$ و $f_3\xrightarrow{f_2}f_3$

ومنه $G:=\{f_2,-4f_3\}$ تشكل قاعدة غروبنر المختزلة للمثالي I

$$G:=\{g_1=x^2+y^2-1,\ g_2=y^4+4y^2-4\}$$

$\boxed{2}$ تمرين : $x > y$ glex

$\boxed{f_1 = -y^2+2x}$. $\boxed{f_2 = x^2+y^2-1}$

نضع $G := \{f_1 , f_2\}$

$$S(f_1,f_2) = \frac{x^2y^2}{-y^2} f_1 - \frac{x^2y^2}{x^2} f_2 = -y^4-2x^3+y^2$$

① بالتقسيم على f_1

$$\begin{array}{r|l} & y^2 \\ \hline -y^2+2x & -y^4-2x^3+y^2 \\ & -y^4+2xy^2 \\ \hline & r = -2x^3-2xy^2+y^2 \end{array}$$

② تقسيم الباقي على f_2

$$\begin{array}{r|l} & -2x \\ \hline x^2+y^2-1 & -2x^3-2xy^2+y^2 = r \\ & -2x^3-2xy^2+2x \\ \hline & y^2-2x = -f_1 \end{array}$$

ومنه $S(f_1,f_2) \xrightarrow{G} 0$

ومنه

$G = \{f_1, f_2\}$ قاعدة غروبنر للمثالي I

ومنه

$\{-f_1 , f_2\}$ قاعدة غروبنر أصغرية للمثالي I (ضربنا f_1 بـ -1 ليصبح أمثال الحد القائد هو 1).

وكذلك

$f_2 \xrightarrow{-f_1} f_2$ و $-f_1 \xrightarrow{f_2} -f_1$

ومنه

$$G = \{ g_1 = y^2-2x \ , \ g_2 = x^2+y^2-1 \}$$

هي

قاعدة غروبنر أصغرية مختزلة للمثالي

ومنه قاعدة الترتيب المعطاة

حل وظيفة م ٧٢ : 7 - 2 نتعلم من اخطاء الآخرين

1

نرتب كلاً من f_1, f_2 حسب قاعدة الترتيب المعطاة : $y >_{lex} x$

$$\boxed{f_1 = -y + x^2 + 1} \qquad \boxed{f_2 = yx + x - 1}$$

نبرهن أن $G := \{f_1, f_2\}$

$$S(f_1, f_2) = \frac{yx}{-y} f_1 - \frac{yx}{yx} f_2 = -x^3 - 2x + 1 \longrightarrow$$ نضيف

وضعه G

2

وهو $\boxed{f_3 := -x^3 - 2x + 1}$

لتصبح $G : \{f_1, f_2, f_3\}$.

$$S(f_1, f_2) = \frac{yx^3}{-y} f_1 - \frac{yx^3}{-x^3} f_3 = -2yx + y - x^5 - x^3$$

① نقسم على f_2 فقط

$$\begin{array}{r|l} & -2 \\ \hline yx + x - 1 & -2\cancel{y}x + y - x^5 - x^3 \\ & -2\cancel{y}x - 2x + 2 \\ \hline & y - x^5 - x^3 + 2x - 2 \end{array} \quad = r_1$$

② نقسم r_1 على f_1 فقط،

$$\begin{array}{r|l} & -1 \\ \hline -y + x^2 + 1 & \cancel{y} - x^5 - x^3 + 2x - 2 \\ & \cancel{y} - x^2 - 1 \\ \hline & x^5 - x^3 + x^2 + 2x - 1 \end{array} \quad = r_2$$

③ نقسم r_2 على f_3 فقط.

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - 1 \\ \hline -x^3 - 2x + 1 & \cancel{-x^5} - x^3 + \cancel{x^2} + 2x - 1 \\ & \cancel{-x^5} - 2x^3 + x^2 \\ \hline & x^3 + 2x - 1 \\ & x^3 + 2x - 1 \\ \hline & 0 \end{array}$$

ومنه

$$S(f_1, f_3) \xrightarrow{G} 0$$

لنحسب :

$$S(f_2, f_3) = \frac{yx^3}{yx} f_2 - \frac{yx^3}{-x^3} f_3 = -2yx + y + x^3 - x^2$$

① لنقسم على f_2 :

$$\begin{array}{r|l} & -2 \\ \hline yx + x - 1 & \cancel{-2yx} + y + x^3 - x^2 \\ & \cancel{-2yx} - 2x + 2 \\ \hline & y + x^3 - x^2 + 2x - 2 = r_1 \end{array}$$

② لنقسم r_1 على f_1 فنجد

$$\begin{array}{r|l} & -1 \\ \hline -y + x^2 + 1 & \cancel{y} + x^3 - \cancel{x^2} + 2x - 2 \\ & \cancel{y} - \cancel{x^2} - 1 \\ \hline & x^3 + 2x - 1 = -f_3 \end{array}$$

ومنه

$$S(f_2, f_3) \xrightarrow{G} 0$$

ومنه قاعدة غروبنر للمثالي I هي G

ومنه . وبضرب f_1 و f_3 بـ -1 لتصبح الحدود القائدة هو 1 نجد أن القاعدة المختزلة

للمثالي $\langle f_1 , f_2 \rangle$ هي $\{-f_1 , f_2 , -f_3\}$

وبما أن الحد القائد لـ f_2 يقبل القسمة على الحد القائد لـ $-f_1$ فإننا نحذف f_2 فتصبح

قاعدة غروبنر المختزلة هي :

$$= \{-f_1 , -f_3\}$$

$$\{y - x^2 - 1 , x^3 + 2x - 1\}$$

$\boxed{3}$

$$g_1 = -f_1$$

$$g_2 = -f_3 \qquad = x f_1 + f_2$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix}$$ مصفوفة التحويل .

$\boxed{4}$

$$f = x^3 + yx^2 - y^2 + 2x + y - 1$$

نقسم f على $-f_1$:

$$\begin{array}{r|l} & -y \\ \hline y - x^2 - 1 & x^3 + \cancel{yx^2} - \cancel{y^2} + 2x + y - 1 \\ & \underline{+\cancel{yx^2} - \cancel{y^2} \quad + y} \\ & x^3 \quad + 2x \quad - 1 \\ & = -f_3 \end{array}$$

ومنه $f \xrightarrow{G}_+ 0$

ومنه $f \in I$.

وحسب عملية التقسيم السابقة يكون

$$f = -y\, g_1 + g_2 = y f_1 + x f_1 + f_2$$

$$= (y + x) f + f_2$$