## المحاضرة الخامسة عشرة ..

الثلاثاء 5 / 5 / 2015

مسائل : " صفحة ١٢١ "

١- محلول في محاضرة سابقة ..

2- ليكن $X$ و $Y$ فضاءين منظمين . أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي يكون مؤثر خطي $T : X \longrightarrow Y$ محدوداً هو أن تكون الصورة المباشرة للمجموعات المحدودة في $X$ وفق $T$ هي مجموعات محدودة في $Y$ .

$\Leftarrow$ $T$ محدود : $\|Tx\| \leq \|T\| \, \|x\|$

ولتكن $M$ مجموعة جزئية اختيارية من $X$ و $M$ محدودة

( $M$ محدودة أي أنه يوجد كرة تحوي $M$ ولتكن الكرة التي مركزها الصفر)

$\|x - 0\| = \|x\| \leq r$

$x \in M$

وبالتالي فإنّ :

$\|Tx\| \leq \|T\| . r = c$ ثابت

$Tx \in TM$

وبالتالي يكون $TM$ محدود .

$\Rightarrow$ لتكن $M$ محدودة $\forall x \in M : \|x\| \leq r$

$TM$ محدودة $\forall Tx \in TM : \|Tx\| \leq r$

لنثبت أن $T$ محدود:

ولنثبت ذلك في حالة خاصة وذلك بأن نأخذ المجموعة هي الكرة الواحدية المغلقة: $B(0,1)=\{x\in X : \|x\|\leq 1\}$ محدودة

وبالتالي صورة $B(0,1)$ وفق $T$ محدودة.

وبالتالي يوجد $c>0$ بحيث: $\|Tx\| \leq c\|x\| \leq c$

لكن $y\in X \Leftarrow \frac{y}{\|y\|}\in B(0,1)$

$$\Rightarrow \left\|T\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right\| \leq c\left\|\frac{y}{\|y\|}\right\|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|y\|}\|Ty\| \leq c\frac{\|y\|}{\|y\|} = c \Rightarrow \|Ty\| \leq c\|y\| \Rightarrow T \text{ محدود}$$

مسائل: صفحة ١٧٤

١- أثبت صحة ~~متوازي~~ مساواة الأضلاع.

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2)$$

$$\begin{aligned}
L_1 = \|x+y\|^2+\|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\
&\quad + \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle - \langle y,x\rangle - \langle x,y\rangle \\
&= 2\langle x,x\rangle + 2\langle y,y\rangle \\
&= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = L_2
\end{aligned}$$

2- مبرهنة فيثاغورث: إذا كان $x\perp y$ في فضاء جداء داخلي $X$ فبين أنّ: $\|x+y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2$

$$\langle x, y\rangle = 0 \Leftarrow x \perp y$$

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle$$

$$= \langle x, x\rangle + \underbrace{\langle x, y\rangle}_{0} + \underbrace{\langle y, x\rangle}_{0} + \langle y, y\rangle$$

$$= \|x\|^2 + \|y\|^2$$

3- إذا كان $X$ في المسألة السابقة حقيقياً، فبين صحة العكس، أي أن العلاقة الواردة في المسألة السابقة تقتضي أن يكون $x \perp y$، أثبت أن هذا قد لا يصح عندما يكون $X$ عقدياً وأورد أمثلة على ذلك.

الحل:

- $X$ حقيقي والمساواة صحيحة:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Rightarrow \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0$$

$$\langle x+y, x+y\rangle - \langle x, x\rangle - \langle y, y\rangle = 0$$

$$2\langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow \langle x, y\rangle = 0$$

$$\Rightarrow x \perp y.$$

- $X$ عقدي:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Rightarrow \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0$$

$$\langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle$$

$$= \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} + \|y\|^2$$

$$\Rightarrow 0 = 2\,Re\,\langle x, y\rangle$$

$$\Rightarrow Re\,\langle x, y\rangle = 0$$

6- ليكن $x \neq 0$ و $y \neq 0$ ، بين أنه إذا كان $x \perp y$ فإن $\{x, y\}$ مجموعة مستقلة خطياً.

الحل :

لدينا بالفرض $x \neq 0$ و $y \neq 0$ و $x \perp y$

$\{x, y\}$ مستقلة خطياً عندما $\alpha x + \beta y = 0$

وبالتالي $\| \alpha x + \beta y \|^2 = 0$

$\langle \alpha x + \beta y , \alpha x + \beta y \rangle = 0$

$|\alpha|^2 \|x\|^2 + |\beta|^2 \|y\|^2 = 0$

لدينا $x \neq 0$ و $y \neq 0 \Leftarrow \|y\|^2 \neq 0 \; , \; \|x\|^2 \neq 0$

$\Rightarrow |\alpha|^2 = 0 \; , \; |\beta|^2 = 0$

$\Rightarrow |\alpha| = 0 \; , \; |\beta| = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \; , \; \beta = 0$

وهذا الحل وحيد

وبالتالي تكون هذه الجملة مستقلة خطياً.

انتهت المحاضرة..