المحاضرة الرابعة عشرة..

الأحد 2015/5/10

تمديبات صفحة 11.. التدريب 2:

إذا كانت $R \neq \phi$ مجموعة غير خالية من أجزاء ما تحقق ما يلي:

$A, B \in R \Rightarrow A \cup B \in R \; , \; A \cap B \in R$

فإن R ليست بالضرورة حلقة.

الحل:

نأخذ مثال معاكس: $X = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 16\}$

$R = \{\{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

إن R مغلقة بالنسبة للتقاطع والاجتماع ولكنها لا تحوي الخالية

إذاً R ليست حلقة.

التدريب 1 حلول صفحة 180

تمديب:

إذا كانت $R \neq \phi$ تحقق ما يلي،

$A, B \in R : A \Delta B \in R \; , A - B \in R$

أثبت أن R حلقة.

الحل:

بما أن $R \neq \phi$ فإنه يوجد $A \in R$:

$A \Delta A = \phi \in R$

$A \cup B = A \Delta (B - A) \in R$

$A \cap B = (A \cup B) \Delta (A \Delta B) \in R$

أعد السؤال إذا كانت $R \neq \phi$ تحقق: $A \Delta B \in R \; , A \cup B \in R$

الحل:

بما أن R ليست خالية نأخذ مجموعة A ننتمي إليها:

$\Rightarrow A \Delta A = \phi \in R$

$$A \cap B = (A \cup B) \underset{\in R}{\Delta} (A \underset{\in R}{\Delta} B)$$
$$\in R \quad \in R$$

$\Rightarrow A \cap B \in R$

$A - B = A \underset{\in R}{\Delta} (A \cap B) \Rightarrow A - B \in R$

وبالتالي تكون R حلقة.

تدريب 2 صفحة 15..

برهن أن الشرطين الآتيين متكافئان

1- $\mathcal{A}$ جبر تام في X

2- $\mathcal{A}$ جبر في X وإذا كانت $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots \in \mathcal{A}$ فإن: $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$

الحل:

1 ⟸ 2 محققه وضوحاً (حسب تعريف الجبر التام)

1 ⟸ 2

لتأخذ $A_1, \dots, A_n, \dots$ متتالية كيفية من $\mathcal{A}$ ولنثبت أن $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$ بتنتمي إلى $\mathcal{A}$.

لنشكل المتتالية:

$B_1 = A_1$

$B_2 = A_2 - A_1$

$B_3 = A_3 - (A_2 \cup A_1)$

$\vdots$

$B_n = A_n - (A_{n-1} \cup A_{n-2} \cup \dots \cup A_1)$

نحصل على متتالية $(B_n)_{n \geq 1}$ من المجموعات المنفصلة ويمكن إثبات أن اتحاد هذه المجموعات المنفصلة ينتمي إلى $\mathcal{A}$.

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

لدينا الطرف الأيمن ينتمي إلى $\mathcal{A}$ إذاً المجموعة A تنتمي إلى $\mathcal{A}$.

انتهت المحاضرة..