3 - الجمع على المثاليات:

اذا كان $I, J \subset K[x_1, \dots x_n]$ مثاليين مجموعهما $I+J$ يعرف على الشكل:

$$I+J = \{ f+g \; ; f \in I \wedge g \in J \}$$

مبرهنة:

مجموع مثاليين من $K[x_1, \dots x_n]$ هو مثالي في $K[x_1, \dots x_n]$.

أي $I, J \subset K[x_1, \dots x_n]$ مثاليان فان $I+J \subset K[x_1, \dots x_n]$ مثالي وهو أصغر مثالي يحوي كل منهما.

★ الاثبات: وضوحاً ان $0 \in I+J$ (لأن كل منهما مثالي $0 \in I$ مع $0 \in J$).

★ اذا كان $I = \langle f_1, \dots f_s \rangle$ ، $J = \langle g_1, \dots g_t \rangle$

فان: $I+J = \langle f_1, \dots f_s, g_1, \dots g_t \rangle$

ليكن $h_1, h_2 \in I+J$ ومنه

$\exists f_1, f_2 \in I$ ، $\exists g_1, g_2 \in J$

بحيث
$$h_1 = f_1 + g_1$$
$$h_2 = f_2 + g_2$$

ومنه

$$h_1 + h_2 = (f_1+g_1) + (f_2+g_2) = \underbrace{(f_1+f_2)}_{\in I} + \underbrace{(g_1+g_2)}_{\in J} \in I+J$$

اذن $I+J$ مغلق بالنسبة للجمع.

★ الانغلاق بالنسبة للضرب:

ليكن $h \in I+J$ ، ولتكن $p \in K[x_1, \dots x_n]$ عندئذ يوجد $f \in I$ مع $g \in J$

بحيث $h = f+g$

وبالتالي
$$ph = p(f+g)$$
$$= \underbrace{pf}_{\in I} + \underbrace{pg}_{\in J} \in I+J$$

اذن تحقق الإغلاق بالضرب .

ما سبق نجد $I+J$ مثالي .

(يترك باقي البرهان للمطالعة وهو غير مطلوب) .

نتيجة :

اذا كانت $f_1, \ldots f_s \in K[x_1, \ldots x_n]$ فإن

$$\langle f_1, \ldots f_s \rangle = \langle f_1 \rangle + \langle f_2 \rangle + \cdots + \langle f_s \rangle$$

مبرهنة :

اذا كان I, J مثاليين في $K[x_1, \ldots x_n]$ فإن :

$$V(I+J) = V(I) \cap V(J)$$

الاثبات :

← ليكن $x \in V(I+J) \Leftarrow x \in V(I)$

لأن $I \subset I+J$

وكذلك :

$x \in V(J)$ ، اذن $x \in V(I) \cap V(J)$ أي

$$\boxed{V(I+J) \subseteq V(I) \cap V(J)} \quad \ldots (1)$$

← من جهة ثانية

لنفرض $x \in V(I) \cap V(J)$ و ليكن $h \in I+J$ عندئذ يوجد

$f \in I$ و $g \in J$ حيث $h = f + g$

لدينا $f(x) = 0$ لأن $x \in V(I)$

وكذلك $g(x) = 0$ لأن $x \in V(J)$

، اذن

$$h(x) = f(x) + g(x) = 0 + 0 = 0$$

وكون h اختيارية فإن $x \in V(I+J)$

أي أن

$$\boxed{V(I) \cap V(J) \subseteq V(I+J)} \quad \ldots (2)$$

من (1) و (2) فإن $V(I+J) = V(I) \cap V(J)$

أمثلة:

عين في $\mathbb{R}^2$ المتنوعات:

1. $V(x^2+y^2-1)$.

هذه المتنوعة هي دائرة الواحدة التي مركزها $(0,0)$.

2. $V(x^2+y^2-1, x-y)$.

وهي تساوي $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$

3. أوجد في $\mathbb{C}^2$ المتنوعة $V(x^2+y^2+1)$ وظيفة. (12-1)

للمناقشة

4. عين في $\mathbb{R}^3$ المتنوعة $V\left(x^2+y^2+z^2-1, z-\frac{1}{2}\right)$

المتنوعة هي تقاطع المستوى $z=\frac{1}{2}$ مع كرة الواحدة.

5. عين في $\mathbb{R}^2$ المتنوعة

$$V(xy-2x-y+1, x-2)$$

الحل:

المتنوعة مكونة من جميع الأصفار المشتركة لـ

$xy-2x-y+1$ و $x-2$

الأولى مستقيم $x=2$

والثانية

$$x(y-2)-(y-2)-1=0$$

$$(y-2)(x-1)-1=0$$

$$(x-1)(y-2)=1$$

وهذه معادلة قطع زائد منسوباً لمقاربيه

$x = 1$ & $y = 2$

اذن:

بتعويض $x=2$ في معادلة القطع الزائد $(2-1)(y-2) = 1$

ومنه $y = 3$

وإذن

المنوعة المطلوبة هي $\{(2,3)\}$

6 أوجد $V(y^2-1, z^2-1)$ في $\mathbb{R}^3$. وظيفه (2-12)

7 عين مثالي المنوعة $V=\{1,2\}$ في $\mathbb{R}[x]$.

الحل

$$I(V) = I(\{1,2\}) = \langle (x-1)(x-2) \rangle$$

8 أوجد مثالي I في $\mathbb{R}[x,y]$ بحيث

$$V(I) = \{(1,1), (2,-3)\}$$

الحل: ليكن:

$$I_1 = \langle x-1, y-1 \rangle$$

$$I_2 = \langle x-2, y-3 \rangle$$

إذن

$I = I_1 . I_2$ Let هو المثالي المطلوب لأن:

$$I = \langle (x-1)(x-2), (x-1)(y+3), (y-1)(x-2), (y-1)(y+3) \rangle$$

وهذا المثالي هو المثالي المطلوب لأن

$V(I) = V(I_1 \cdot I_2) = V(I_1) \cup V(I_2)$ (برهنه)

ملاحظة:

1) لإيجاد مجموعة توليد لمثالي يعرف اجتماع متنوعات أفينية نأخذ جميع المضاريب الممكنة والتي كل منها مكونة من مضاريب الأول ينتمي للمثالي الأول والثاني ينتمي للمثالي الثاني.

2) لإيجاد مجموعة توليد لمثالي يعرف تقاطع متنوعات: نأخذ اجتماع مجموعات التوليد لهذا المثالي.

سؤال يطرح نفسه للمناقشة غداً:

اذا كانت $S \subset K^n$ مجموعة نقاط ليست متنوعة أفينية فهل $I(S)$ الذي يساوي

$I(S) = \{ f \in K[x_1,\dots,x_n] ; f(a)=0, \forall a \in S \}$ مثالي ؟!

$a=(a_1,\dots,a_n) ; a_i \in K$.

تعريف: (لصاقة زاريسكي Zariski):

لتكن $S \subset K^n$ مجموعة جزئية ما.

تعرف لصاقة زاريسكي لـ S على أنها أصغر متنوعة أفينية تحوي S ونرمز لها بـ $\bar{S}$

أي أن:

$$\bar{S} = V(I(S))$$

انتهت المحاضرة الثامنة عشر

وقبل الأخيرة.

Rehab

ملاحظة 12-2 م 123 :

ايجاد $V(y^2-1, z^2-1)$ في $\mathbb{R}^3$:

تم نقل الحل من مقرر السنة الماضية :

$$V(y^2-1, z^2-1) = V(y-1, y+1) \cap V(z-1, z+1)$$
$$= [V(y-1) \cup V(y+1)] \cap [V(z-1) \cup V(z+1)]$$

وهي تعبر عن مجموعة نقاط أربعة مستقيمات في $\mathbb{R}^3$ كل منها موازٍ لـ $\overrightarrow{ox}$ ويبعد عنه مقدار $\sqrt{2}$:

نوضح ذلك بالرسم :