الجمهورية العربية السورية	**امتحان الفصل الأول**	التاريخ:الثلاثاء ١٠/٢/٢٠١٥م
وزارة التعليم العالي	**السنة الثالثة رياضيات**	الوقت :١٥_١١-١٥_١
فرع درعا ـكلية العلوم	**المقرر تحليل ٥**	الاسم:

السؤال الأول (٤٠ درجة): برهن ما يلي:

١. إذا كانت f دالة ذات تغير محدود على المجال $[a,b]$ فإن $|f(x)|$ دالة ذات تغير محدود على المجال $[a,b]$. ولكن العكس ليس بالضرورة وضح ذلك.

٢. إذا كانت الدالة f مطردة على المجال $[a,b]$ فإن f دالة ذات تغير محدود على المجال $[a,b]$. ولكن العكس ليس بالضرورة وضح ذلك.

السؤال الثاني (٣٠ درجة): أثبت أن كلا من الدوال الآتية ذات تغير محدود ثم أوجد التغير الكلي لكل دالة مع الرسم:

1. $f(x)=x-x^2 : x\in[0,3]$

2. $g(x)=x-|x| : x\in[-3,3]$

3. $h(x)=x-[x] : x\in[-2,2]$

السؤال الثالث (٣٠ درجة): أحسب تكامل استيلجس لكل مما يلي مع رسم $g(x)$:

1. $\int_0^2 (x+2)dg(x):\quad g(x)=[x]$ ثم استنتج $\Rightarrow \int_0^2 g(x)d(x+2):\quad g(x)=[x]$

2. $\int_{-2}^{2}(x^2+1)dg(x):\quad g(x)=\begin{cases} x+2 & -2\le x\le -1\\ 2 & -1<x<0\\ x^2+3 & 0\le x\le 2\end{cases}$

3. $\int_{-1}^{3} x^2 dg(x):\quad g(x)=\begin{cases} 0 & x=-1\\ 1 & -1<x<2\\ -1 & 2\le x\le 3\end{cases}$

انتهت الأسئلة

مع دعائي لكم بالنجاح والتوفيق

د. نايف طلي

// أسئلة تصحيح تحليل ٥ //

السؤال الأول [1]

f د. ت. م على $[a,b]$ $\Leftarrow$ $|f|$ د. ت. م على $[a,b]$.

البرهان: f د. ت. م على $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ $\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \sup_{P\in P[a,b]} V(f,P) < \infty$

حيث
$$V(f,P)=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$$

$$P=\{x_0,x_1,x_2,\dots,x_n : x_0=a<x_1<x_2\dots<x_n=b\}$$

$$< \big|\,|f(x_k)|-|f(x_{k-1})|\,\big| < |f(x_k)-f(x_{k-1})| \quad : k=\overline{1,n}$$

$$< \sum_{k=1}^{n}\big|\,|f(x_k)|-|f(x_{k-1})|\,\big| < \sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$$

$$< \overset{b}{\underset{a}{V}}|f| < \overset{b}{\underset{a}{V}} f < \infty \Rightarrow$$ $|f|$ د. ت. م على $[a,b]$

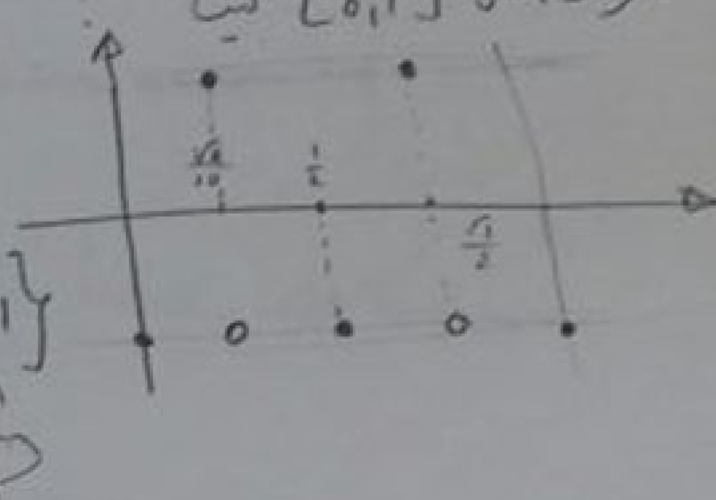
---

[2] **العكس:** $|f|$ د. ت. م على $[a,b]$ $\not\Rightarrow$ f د. ت. م على $[a,b]$

نأخذ مثالاً يكون فيه $|f|$ د. ت. م على $[a,b]$ ولكن f ليست د. ت. م (مثلاً):

نعرف f على $[0,1]$ حيث

$$< f(x)=\begin{cases}-1 & x\in Q\\ 1 & x\notin Q\end{cases}$$



نأخذ التجزئة.

$$P=\{x_0,x_1,\dots x_n : x_0=0<x_1\dots x_{n-1}<x_n=1\}$$

$$< \underset{Q}{\uparrow} \quad \underset{\bar{Q}}{\uparrow} \quad \underset{Q}{\uparrow}$$

$$f(x)\to(-1)\quad(1)$$

① لأن $|f(x)|=1$ دالة ثابتة على $[0,1]$ وبالتالي

$$\sum_{k=1}^{n}\big|\,|f(x_k)|-|f(x_{k-1})|\,\big|=\sum_{k=1}^{n}|1-1|=0<\infty \Rightarrow$$ $|f|$ د. ت. م على $[a,b]$

②

$$V(f,P)=|1-(-1)|+|(-1)-1|+\dots|-1-1|$$ ع

$$=\underbrace{2+2+\dots+2}_{n\ \text{مرة}}=2n \Rightarrow \overset{b}{\underset{a}{V}} f=\lim_{n\to\infty}2n=+\infty$$

$\Rightarrow$ f د. ليست ذات تغير محدود

٤) f دالة مطردة على المجال $[a,b]$ $\Longleftarrow$ f د.ت.م على $[a,b]$.

f دالة مطردة على $[a,b]$ $\Leftarrow$ $\forall x_1, x_2 \in [a,b] : x_1 \le x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ <

(إذا كان f متزايدة)

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \sup_{P \in \mathbb{P}[a,b]} V(f,P) = \sup_{P \in \mathbb{P}[a,b]} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| < \infty$$ منتهي

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots x_n : x_0 = a < x_1 < x_2 \dots < x_n = b\}$$

$$V(f,P) = |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \dots + |f(x_n) - f(x_{n-1})|$$

بما أن f متزايدة فإن

$$= f(x_1) - f(a) + f(x_2) - f(x_1) + \dots f(x_n) - f(x_{n-1})$$

$$= f(x_n) - f(a) = \underset{\text{ثابت}}{f(b)} - \underset{\text{ثابت}}{f(a)} < \infty \Rightarrow$$

f د.ت.م على $[a,b]$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = |f(b) - f(a)| < \infty$$ منتهي.

العكس: $f(x) = x - x^2 : x \in [0,3]$ دالة ذات تغير محدود، ولكنها ليست مطردة.

$f(x) = x(1-x)$ $\quad f(x) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 1$

$f'(x) = 1 - 2x \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$f(3) = 3 - 9 = -6$

x	0		$\frac{1}{2}$		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	-6

نلاحظ أن

$$\overset{3}{\underset{0}{V}} f = \overset{\frac{1}{2}}{\underset{0}{V}} f + \overset{3}{\underset{\frac{1}{2}}{V}} f = |f(\tfrac{1}{2}) - f(0)| + |f(3) - f(\tfrac{1}{2})|$$

$$= \frac{1}{4} - 0 + |-6 - \frac{1}{4}| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 6 = 6\frac{1}{2} = \frac{13}{2} < \infty$$

نلاحظ أن f د.ت.م، ولكنها ليست مطردة على $[0,3]$

السؤال الثاني :

$\boxed{1}$ $f(x) = x - x^2 \quad : x \in [0,3]$

بما أن الدالتين $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$ متزايدتين على $[0,3]$ ، إذن الدالة $f(x)$ فرق دالتين متزايدتين على $[0,3]$ فهي د. ت (على $[0,3]$ حسب نظرية .

$f(x) = x - x^2 \quad : \quad x \in [0,3] \quad : f'(x) = 1 - 2x \quad : x =$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$f(1/2) = \frac{1}{4}$

x	0		$\frac{1}{2}$		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	-6

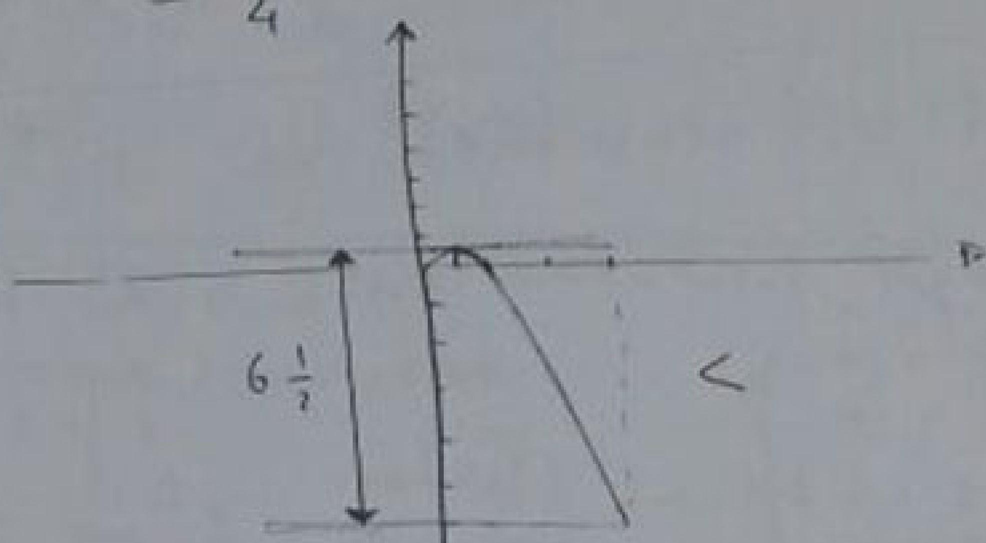
$f(0) = 0$

$f(3) = 3 - 9 = -6$

ع

$$\overset{3}{\underset{0}{V}} f = \overset{\frac{1}{2}}{\underset{0}{V}} f + \overset{3}{\underset{\frac{1}{2}}{V}} f = \left| f(\tfrac{1}{2}) - f(0) \right| + \left| f(3) - f(\tfrac{1}{2}) \right|$$

$$= \frac{1}{4} - 0 + \left| -6 - \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 6 = \frac{13}{2}$$



<

$\boxed{2}$ $g(x) = x - |x| \quad : x \in [-3,3]$

$$= \begin{cases} x - x & 3 \geq x \geq 0 \\ x + x & -3 \leq x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 3 \\ 2x & -3 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

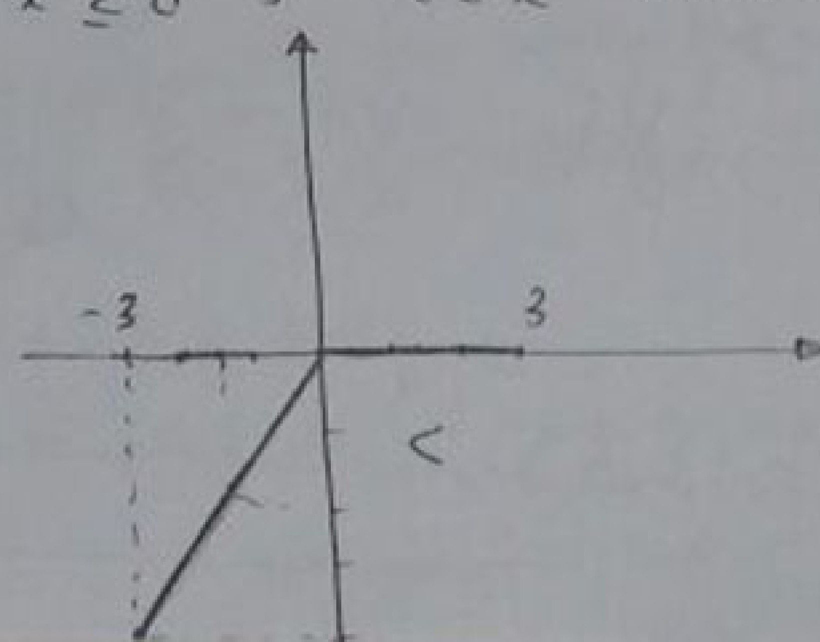
① نلاحظ أن $g(x)$ دالة متزايدة غير مطردة

< على $[-3,3]$ ، إذن هي د. ت (على $[-3,3]$

حسب نظرية .

② $\overset{3}{\underset{-3}{V}} f = |f(3) - f(-3)|$

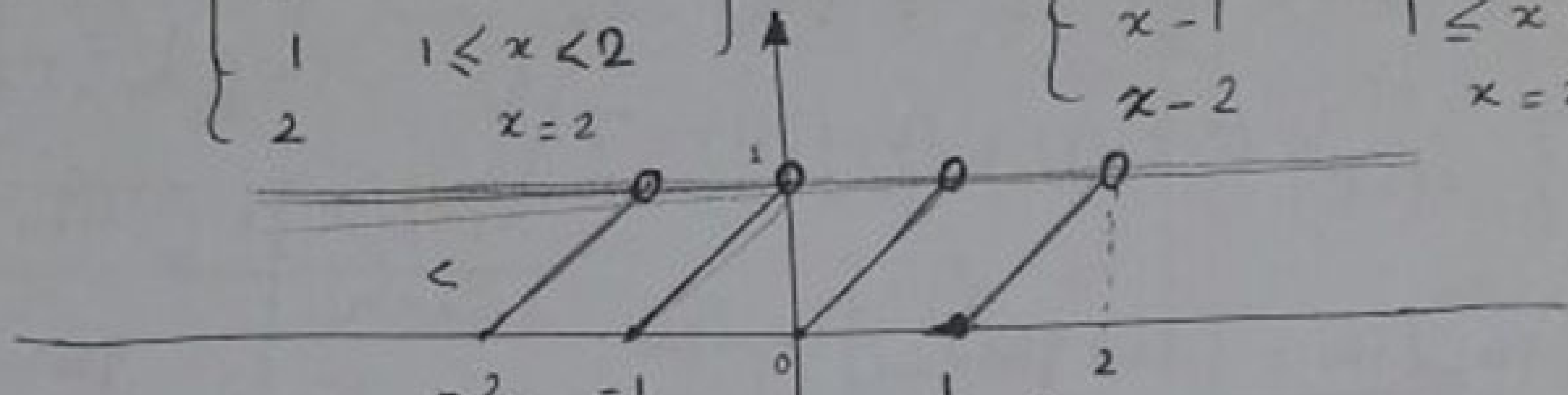
$= |0 - (-6)| = 6$ ع



<

٤/ $\boxed{3}$ $h(x) = x - [x] \; : \; x \in [-2,2]$

$$[x] = \begin{cases} -2 & -2 \le x < -1 \\ -1 & -1 \le x < 0 \\ 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x < 2 \\ 2 & x = 2 \end{cases} \Rightarrow h(x) = \begin{cases} x+2 & -2 \le x < -1 \\ x+1 & -1 \le x < 0 \\ x & 0 \le x < 1 \\ x-1 & 1 \le x < 2 \\ x-2 & x = 2 \end{cases}$$



① نلاحظ ان الدالة $h(x)$ هي فرق لدالتين متزايدتين على $[-1,1]$، بالتالي $h(x)$ د.ت.م على $[-2,2]$

$$\bigvee_{-2}^{2} h(x) = \bigvee_{-2}^{-1} h(x) + \bigvee_{-1}^{0} h(x) + \bigvee_{0}^{1} h(x) + \bigvee_{1}^{2} h(x)$$

نلاحظ ان التغير الكلي لكل مجال جزئي لا يختلف عن التغير الكلي للمجال الجزئي الآخر.

لحساب $\bigvee_{-1}^{0} h(x)$ نأخذ تجزئة عشوائية نونية منتظمة $[-1,0]$

$$P = \{-1 = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_{n-1} < x_n = 0\} \qquad \Delta x = \frac{0-(-1)}{n}$$

$$\begin{aligned} x_0 &= -1 \\ x_1 &= -1 + \tfrac{1}{n} \\ x_2 &= -1 + \tfrac{2}{n} \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= -1 + \tfrac{n-1}{n} \\ x_n &= -1 + 1 = 0 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} h(x_0) &= h(-1) = -1 + 1 = 0 \\ h(x_1) &= h(-1 + \tfrac{1}{n}) = -1 + \tfrac{1}{n} + 1 \\ h(x_2) &= h(-1 + \tfrac{2}{n}) = -1 + \tfrac{2}{n} + 1 \\ h(x_{n-1}) &= -1 + \tfrac{n-1}{n} + 1 \quad ٤ \\ h(x_n) &= h(0) = 0 \end{aligned} \right.$$

$$V(h,P) = |h(x_1) - h(x_0)| + |h(x_2) - h(x_1)| + \cdots + |h(x_n) - h(x_{n-1})|$$

$$= \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n-1 \text{ عدد}} + \frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n} + \frac{n-1}{n} = \frac{2n-2}{n}$$

$$\bigvee_{-1}^{0} h(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{2n-2}{n} = 2$$

$$\bigvee_{-2}^{2} h(x) = 2(4) = 8$$

السؤال الثاني :

احسب ،

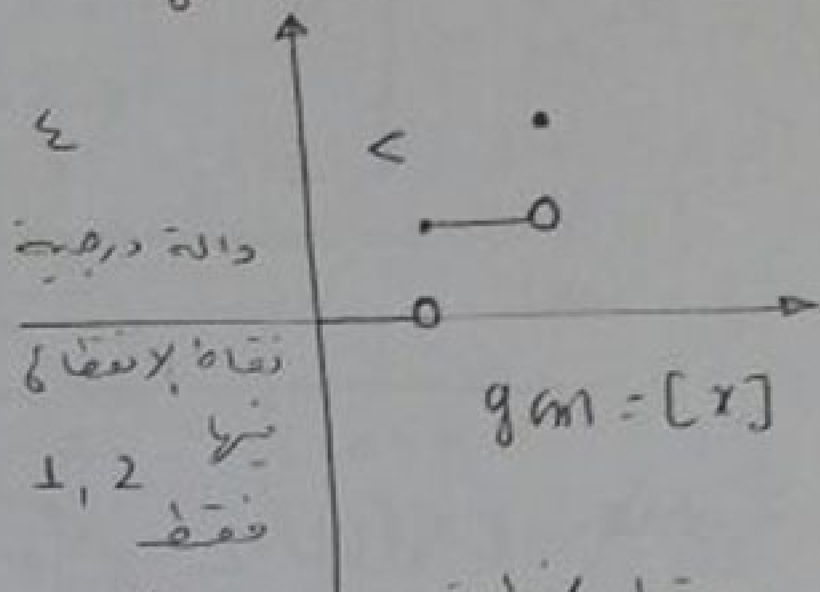
① $\int_0^2 (x+2)\,dg(x) \;:\; g(x) = [x]$

$f(x) = (x+2)\,,\; g(x) = [x]$ $\qquad \int_0^2 g(x)\,d(x+2)$

$\int_0^2 f(x)\,dg(x) = f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1$

$= (1+2)(1) + (2+2)(1) = 7$

دالة درجية



نقاط الانقطاع هي 1, 2 فقط

ومقدار القفزة يساوي الواحد .

$\int_0^2 g(x)\,df(x) = \big[f(x)\cdot g(x)\big]_0^2 - \int_0^2 f(x)\,dg(x)$

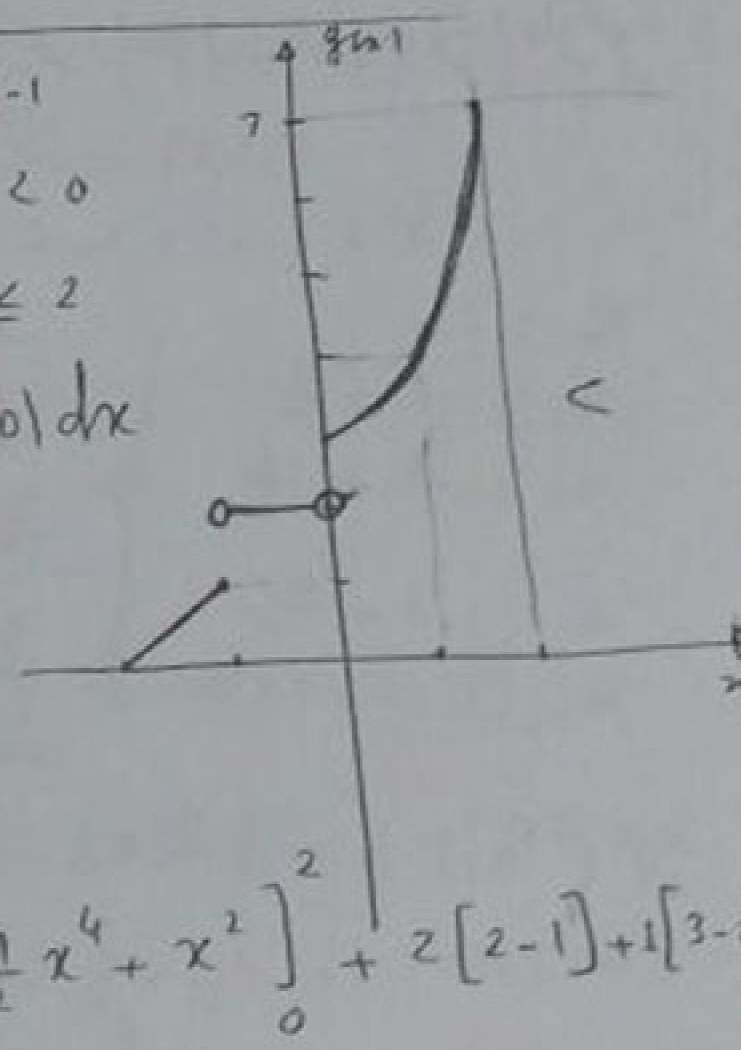
$= \big[(x+2)[x]\big]_0^2 - 7$

$= \big[(2+2)(2) - 0\big] - 7 = 1$

---

② $g(x) = \begin{cases} x+2 & -2 \le x \le -1 \\ 2 & -1 < x < 0 \\ x^2+3 & 0 \le x \le 2 \end{cases}$

نقاط الانقطاع $-1, 0$



$\int_{-2}^{2} (x^2+1)\,dg(x) = \int_{-2}^{-1} (x^2+1)(1)\,dx + \int_{-1}^{0} (x^2+1)(0)\,dx$

$+ \int_0^2 (x^2+1)(2x)\,dx$

$+ f(-1)\big[g(-1+0) - g(-1-0)\big]$

$+ f(0)\big[g(0+0) - g(0-0)\big]$

$\int_{-2}^{2} (x^2+1)\,dg(x) = \left(\frac{x^3}{3} + x\right]_{-2}^{-1} + 0 + \left[\frac{1}{2}x^4 + x^2\right]_0^2 + 2\,[2-1] + 1\,[3-2]$

$= -\frac{1}{3} - 1 - \left(-\frac{8}{3} - 2\right) + [8 + 4 - 0] + 3$

$= \frac{7}{3} + 1 \qquad + 15 = 16 + \frac{7}{3} = \frac{48+7}{3}$

$= \frac{55}{3}$

7/ 3

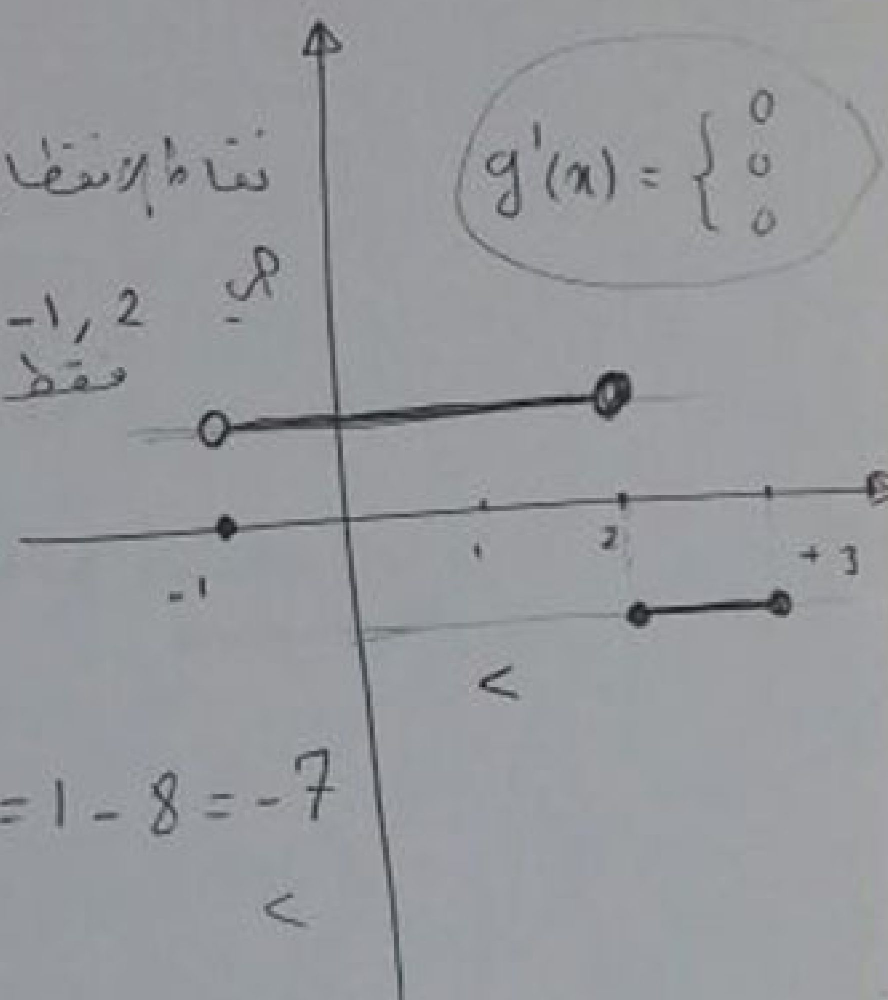
$$g(x) = \begin{cases} 0 & x = -1 \\ 1 & -1 < x < 2 \\ -1 & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

$$I = \int_{-1}^{3} x^2 \, d\,g(x)$$

$f(x) = x^2$, $g(x) \leftarrow$

نقاط الانقطاع هي $-1, 2$ فقط

$$g'(x) = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$



$$I = f(-1)\left[g(-1+0) - g(-1-0)\right] + f(2)\left[g(2+0) - g(2-0)\right]$$

$$= 1\left[1 - 0\right] + 4\left[-1 - 1\right] = 1 - 8 = -7$$