لي . الخميس ٣٠/٤/٢٠١٠
عملي مع ... ومحلولة

"ملحق 6"

٣ التعاريف هامة جداً منه كاراثيودوري الكبرى (مبرهنة كاراثيودوري)

إذا كانت $X \neq \phi$ مجموعة غير خالية و $\mathcal{P}(X)$ مجموعة أجزائها و $\mu^*: \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ تطبيقاً محققاً ما يلي:

(1) $\mu^*(\phi) = 0$ ، (2) $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

و (3) $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ متتالية من أجزاء X و $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

فإن $\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

فإن μ^* ليس بالضرورة قياساً على $\mathcal{P}(X)$، يسمى μ^* قياساً خارجياً على $\mathcal{P}(X)$ أجزاء X (1)

وإذا وصفنا $\mathfrak{m}^*$ (2) رمزاً لصف المجموعة الجزئية E المحققة للشرط الآتي:

(الشرط) (ب) $\mu^*(K) = \mu^*(K \cap E) + \mu^*(K \cap E^c) \quad \forall K \subseteq X$

عندئذٍ تكون (ج) $\mu^*(X) = \mu^*(E) + \mu^*(E^c)$

وتكون $\mathfrak{m}^*$ جبراً بل جبراً تاماً من أجزاء X

وتكون مقصور μ^* عليه قياساً موجباً كاملاً

وإذا كان μ قياساً معرفاً على جبر $\mathcal{A}$ (من أجزاء X) و

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \; ; \; \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supseteq A, \; A_n \in \mathcal{A}, \; n \geq 1 \right\}$$

فإن μ^* تكون قياساً خارجياً على $\mathcal{P}(X)$ نسميه القياس الخارجي المولد من μ (2)

وهنا نرى أن $\mathfrak{m}^* \supseteq \sigma(\mathcal{A})$ وأن مقصور μ^* على $\sigma(\mathcal{A})$ هو قياس يمدد μ

ثانياً

الأولى

خطوات الإثبات: (خ1) اثبات أن ϕ و $X \in \mathfrak{m}^*$

(خ2) $A \in \mathfrak{m}^* \Rightarrow A^c \in \mathfrak{m}^*$

(خ3) $A, B \in \mathfrak{m}^* \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{m}^*$

(خ4) $\forall K : \mu^*(K \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(K \cap A_i)$

حيث $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{m}^*$ منفصلة

(خ5) = (خ4) : $\forall K : \mu^*(K \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(K \cap A_i)$

حيث $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathfrak{m}^*$ متتالية منفصلة

(خ6) $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathfrak{m}^* \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{m}^*$ منفصلة

و $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$

(المجموعات المذكورة $A_1, \dots, A_n, \dots$ منفصلة)

(خ7) $B \in \mathfrak{m}^*$ ، $A \subseteq B$ ، $\mu^*(B) = 0 \Rightarrow A \in \mathfrak{m}^*$ (μ^* قياس كامل)

(خ8) $\forall A \in \mathcal{A} : A \in \mathfrak{m}^*$ ، $\mu(A) = \mu^*(A)$ (μ^* يمدد μ كقياس خارجي)

(ج) $\phi = E$. تنتمي إلى m^*_μ ؟ لدينا $\forall K \subseteq X : \mu^*(K) \overset{?}{=} \mu^*(K\cap E)+\mu^*(K\cap E^c)$

$$= \mu^*(K\cap\phi)+\mu^*(K\cap\phi^c) = \mu^*(\phi)+\mu^*(K\cap X) = 0+\mu^*(K) = \mu^*(K)$$

تم تحقق الشرط (له)

$X = E$. تنتمي إلى m^*_μ ؟ لدينا $\forall K \subseteq X : \mu^*(K) \overset{?}{=} \mu^*(K\cap E)+\mu^*(K\cap E^c)$

$$= \mu^*(K\cap X)+\mu^*(K\cap X^c) = \mu^*(K)+\mu^*(K\cap\phi) = \mu^*(K)+\mu^*(\phi) = \mu^*(K)$$

(تم تحقق الشرط له)

(خ) $A = E$ تحقق الشرط (له) $\overset{?}{\Rightarrow}$ E^c تحقق الشرط (له):

$$\forall K : \mu^*(K) \overset{?}{=} \mu^*(K\cap E^c)+\mu^*(K\cap (E^c)^c)$$
$$= \mu^*(K\cap E^c)+\mu^*(K\cap E)$$
$$= \mu^*(K\cap E)+\mu^*(K\cap E^c)$$

وهذا محقق كون E تحقق الشرط (له).

(غ)

لنفرض أن $A, B \in m^*_\mu$, $D = A\cup B$, $K \subseteq X$

$$\mu^*(K) \overset{?}{=} \mu^*(K\cap D)+\mu^*(K\cap D^c)$$

لدينا (لأن A قيوسة)

$$\mu^*(K) = \mu^*(K\cap A)+\underbrace{\mu^*(K\cap A^c)}$$
$$= \mu^*(K\cap A)+\mu^*(K\cap A^c\cap B)+\mu^*(K\cap A^c\cap B^c)$$
$$= \underline{\mu^*(K\cap A)+\mu^*(K\cap A^c\cap B)}+\mu^*(K\cap D^c)$$
$$\geq \mu^*(K\cap D)+\mu^*(K\cap D^c) \geq \mu^*(K)$$

لكن

$$(K\cap A)\cup(K\cap A^c\cap B) \overset{?}{=} K\cap D$$
$$K\cap[\underbrace{A\cup(A^c\cap B)}] \overset{?}{=} K\cap D \quad \text{نعم}$$
$$(K\cap D)\cup(K\cap D^c) = K \quad \text{ثم إذا}$$

إذن تحقق D الشرط (له)

(غ) تبرهن بالتدريج

$$\forall K : \mu^*(\underbrace{K\cap(A_1\uplus A_2)}_{K_1}) \overset{?}{=} \mu^*(K\cap A_1)+\mu^*(K\cap A_2)$$
$$= \mu^*(K_1\cap A_1)+\mu^*(K_1\cap A_1^c) \quad (A_1 \in m^*_\mu)$$

لكن

$$K_1\cap A_1 \overset{?}{=} (K\cap(A_1\uplus A_2))\cap A_1 = K\cap A_1$$
$$K_1\cap A_1^c = K\cap(A_1\uplus A_2)\cap A_1^c = K\cap A_2$$

وتحقق المراد

(بَ = بَ)

$A=\biguplus_{n=1}^{\infty} A_n \;,\; A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in m^* \;,\; \forall K \subseteq X:$

$$\mu^*(K\cap A) \overset{?}{=} \mu^*\left(K\cap\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(K\cap A_i)$$

نلاحظ:

$\forall n \geq 1 \qquad \mu^*(K\cap A) \geq \mu^*\left(K\cap\left(\biguplus_{i=1}^{n} A_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{n}\mu^*(K\cap A_i)$

نجعل $n\to\infty$ $\Rightarrow \mu^*(K\cap A) \geq \sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(K\cap A_i) \geq \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(K\cap A_i)\right)$

$$= \mu^*\left(K\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right)$$

$$= \mu^*(K\cap A)$$

وهكذا نحصل التساوي المطلوب

$A=\biguplus_{n=1}^{\infty} A_n,\; A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in m^* \overset{?}{\Rightarrow} A\in m^*$

Let $K\subseteq X$: $\mu^*(K) \overset{?}{=} \mu^*(K\cap A) + \mu^*(K\cap A^c)$

$\forall n\geq 1: \mu^*(K) = \mu^*\left(K\cap\left(\biguplus_{i=1}^{n} A_i\right)\right) + \mu^*\left(K\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c\right)$

$\geq \mu^*\left(K\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right) + \mu^*(K\cap A^c)$

$= \sum_{i=1}^{n}\mu^*(K\cap A_i) + \mu^*(K\cap A^c)$

$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq \dots \;\; \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c \dots\right)$

if $n\to\infty$ then

$$\mu^*(K) \geq \sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(K\cap A_i) + \mu^*(K\cap A^c)$$

$$\geq \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(K\cap A_i)\right) + \mu^*(K\cap A^c)$$

$$= \mu^*\left(K\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right) + \mu^*(K\cap A^c)$$

$$= \mu^*(K\cap A) + \mu^*(K\cap A^c) \geq \mu^*(K)$$

وهكذا فإن A تحقق الشرط (ك) وبالتالي $A\in m^*$

وأخيراً $\mu^*\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i)$ حيث نأخذ $K=X$ في (خ٥)

ونحصل المطلوب

ج) ما يعتبر μ^* قياساً على m^* ولنبرهن أنه قياس كامل:

$$B \in m^*,\ A \subseteq B,\ \mu^*(B) = 0 \overset{?}{\Rightarrow} A \in m^*$$

لنبرهن أن

$$\mu^*(K) \overset{?}{\geq} \mu^*(K \cap A) + \mu^*(K \cap A^c)$$
$$\leq \mu^*(K \cap B) + \mu^*(K \cap A^c)$$
$$\leq \mu^*(B) + \mu^*(K) = 0 + \mu^*(K) = \mu^*(K)$$

ومنه $A \in m^*$

2) مبرهنة كاراتيودوري لتمديد قياس μ معرف على جبر $\mathcal{A}$ (مبرهنة كاراتيودوري الثانية)

(P) ← اثبات أن μ^* قياس خارجي: اثبات أن μ^* متزايد سهل

لنثبت أن:

$$\begin{cases} A_1, \dots, A_n \dots \subseteq X \\ A = \bigcup_{j=1} A_j \end{cases} \Rightarrow \mu^*(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$$

Let $\varepsilon > 0$, $\forall j \geq 1\ \exists \{B_j^n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{A}$:

$$\mu^*(A_j) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_j^n) - \frac{\varepsilon}{2^j}$$

$$\Rightarrow \sum_j \mu^*(A_j) \geq \sum_j \sum_n \mu^*(B_j^n) - \varepsilon$$
$$\geq \mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) - \varepsilon = \mu(A) - \varepsilon$$

نجعل ε تسعى للصفر فنجد

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j) \geq \mu(A)$$

$$\Rightarrow \quad \mu(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$$

ب) لدينا $\mu^*(A) \leq \mu(A)$ و إذا أخذنا $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ فإن $\mu^*(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$ ، نأخذ الحد الأدنى للطرف الأيمن فنجد $\mu(A) \leq \mu^*(A)$

ج) $\mathcal{A} \subseteq m^*$:

$\forall K, \forall \varepsilon > 0\ \overset{?}{\exists} \{B_j\}_{j\geq 1} \subseteq \mathcal{A} : \mu^*(K) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \leq \mu(K) + \varepsilon$

تغطية نفصلها لـ K

$\forall A \in \mathcal{A}$
$$\mu^*(K) + \varepsilon \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j \cap A) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j \cap A^c) \geq \mu^*(K \cap A) + \mu^*(K \cap A^c) \geq \mu^*(K)$$

نجعل $\varepsilon \to 0$ نحصل على المراد.