المحاضرة السادسة عشرة ..

الإثنين 11 / 5 / 2015 ..

مسائل .. صفحة ١٧٥

٧ / ١٧٥

إذا كان $\langle x, u \rangle = \langle x, v \rangle$ أياً كان x في فضاء جداء داخلي، فبين أن $u = v$.

$$\langle x, u \rangle = \langle x, v \rangle \qquad \forall x$$

$$\langle x, u \rangle - \langle x, v \rangle = 0 \qquad \forall x$$

$$\Rightarrow \langle x, u - v \rangle = 0$$

وبالتالي إما أن يكون $x \perp u - v$ وهي مرفوضة لأنها حالة خاصة لـ x أو أن يكون $x = 0$ وكذلك هي حالة خاصة لـ x المذكور في نص المسألة لدينا أياً كان x)

وبالتالي يكون $u - v = 0$ صحيحة أياً كانت x

$$\Rightarrow u = v$$

طريقة ثانية:

لدينا $\langle x, u \rangle = \langle x, v \rangle$ صحيحة أياً كانت x

وبالتالي نختار $x = u - v$

فيكون: $\langle u - v, u - v \rangle = 0$

$$\Rightarrow \| u - v \|^2 = 0 \Rightarrow u - v = 0$$

$$\Rightarrow u = v$$

11- ليكن X الفضاء المتجهي المؤلف من كل الأزواج المرتبة من الأعداد العقدية.

81

هل يمكن الحصول على النظيم المعرف على X بالمساواة

$$\|x\| = |\xi_1| + |\xi_2| \qquad x = (\xi_1, \xi_2)$$

انطلاقاً من جداء داخلي ؟

لا . النظيم غير مشتق من جداء داخلي لأنه لا يحقق مساواة متوازي الأضلاع.

لنأخذ مثلاً:

$$x = (1,1) \quad , \qquad y = (1,-1)$$

$$\|x\| = |1| + |1| = 2$$

$$\|y\| = |1| + |1| = 2$$

$$\|x+y\| = |2| + |0| = 2$$

$$\|x-y\| = |0| + |2| = 2$$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

$$4 + 4 \stackrel{?}{=} 2(4+4)$$

$$8 \neq 16$$

مسائل .. صفحة ١٨٢

٣- أورد أمثلة لفضاءات جزئية من ℓ^2.

ℓ^2 هو فضاء متتاليات هلبرت $x = (\xi_i)$ وحيث:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 < \infty$$

فضاء المتتاليات الذي يحوي عدد منته من الحدود الثابتة غير الصفرية وفيما عدا ذلك أصفار (فضاء جزئي من ℓ^2)

٤- بين أنّ الشرطين $x_n \perp y$ و $x_n \to x$ يقتضيان أنّ $x \perp y$.

بما أنّ $y \perp x_n \Rightarrow \langle x_n , y \rangle = 0$

و لدينا حسب مبرهنة الجداء الداخلي

$$\underbrace{\langle x_n , y \rangle}_{=0} \longrightarrow \langle x , y \rangle$$

$$\Rightarrow \langle x , y \rangle = 0$$

ومنه يكون $x \perp y$

٥- أثبت أنه إذا كانت (x_n) متتالية في فضاء جداء داخلي فإن الشرطين:
$\|x_n\| \longrightarrow \|x\|$ و $\langle x_n , x \rangle \longrightarrow \langle x , x \rangle$ يقتضيان التقارب $x_n \to x$.

إنّ $x_n \to x$ إذا كان $\|x_n - x\| \to 0$

$$0 \le \|x_n - x\|^2 = \langle x_n - x , x_n - x \rangle = \|x_n\|^2 - \overset{\overline{\langle x_n , x \rangle}}{\overset{\parallel}{\langle x , x_n \rangle}} - \langle x_n , x \rangle + \|x\|^2$$

بأخذ النهايات فإنّ نهاية المجموع يساوي إلى مجموع النهايات

$$\|x_n - x\|^2 = \overbrace{\|x\|^2 - \|x\|^2 - \|x\|^2 + \|x\|^2}^{=0}$$

$$\|x_n - x\|^2 \to 0 \Rightarrow \|x_n - x\| \to 0$$

٧- برهن أنه في فضاء جداء داخلي، فإنّ الشرط اللازم والكافي كي يكون $x \perp y$ هو أن تتحقق المساواة $\|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\|$ أياً كان العدد α.

DABBAGH STATIONERY

$(\Leftarrow)$ لتكن $x \perp y \Leftarrow \langle x,y\rangle = 0$

$$\langle x+\alpha y, x+\alpha y\rangle \overset{?}{=} \langle x-\alpha y, x-\alpha y\rangle$$

$$\|x\|^2 + \underbrace{\bar{\alpha}\langle x,y\rangle}_{0} + \underbrace{\alpha\langle y,x\rangle}_{0} + |\alpha|^2\|y\|^2 \overset{?}{=} \|x\|^2 - \underbrace{\bar{\alpha}\langle x,y\rangle}_{0} - \underbrace{\alpha\langle y,x\rangle}_{0} + |\alpha|^2\|y\|^2$$

$$\Rightarrow \|x+\alpha y\|^2 = \|x-\alpha y\|^2$$

$(\Rightarrow)$ لنفترض أنّ $\forall \alpha \quad \|x+\alpha y\| = \|x-\alpha y\|$

$$\Rightarrow \|x+\alpha y\|^2 = \|x-\alpha y\|^2 \quad \forall \alpha$$

$$\langle x+\alpha y, x+\alpha y\rangle = \langle x-\alpha y, x-\alpha y\rangle \quad \forall \alpha$$

$$\Rightarrow \bar{\alpha}\langle x,y\rangle + \alpha\langle y,x\rangle = -\bar{\alpha}\langle x,y\rangle - \alpha\langle y,x\rangle$$

بعد التقسيم على 2 $\Rightarrow \bar{\alpha}\langle x,y\rangle + \alpha\langle y,x\rangle = 0$

صحيحة مهما α وبالتالي صحيحة مهما $\bar{\alpha}$.

نأخذ $\alpha = 1$:

$$\langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} = 0 \Rightarrow 2\,Re\langle x,y\rangle = 0$$

$$\Rightarrow Re\langle x,y\rangle = 0$$

نأخذ $\alpha = i$:

$$-i\langle x,y\rangle + i\langle y,x\rangle = 0$$

بعد الضرب بـ i $\Rightarrow \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle = 0 \Rightarrow \langle x,y\rangle - \overline{\langle x,y\rangle} = 0$

$$\Rightarrow 2\,Im\langle x,y\rangle = 0 \Rightarrow Im\langle x,y\rangle = 0$$

وبالتالي $\langle x,y\rangle = 0 \Leftarrow x \perp y$

انتهت المحاضرة ..