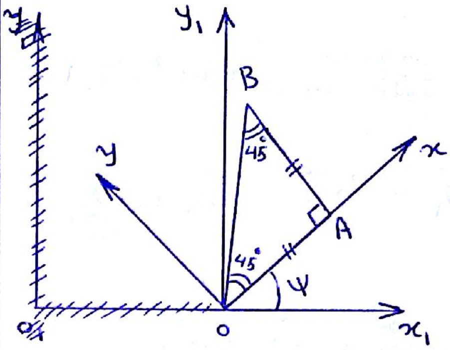
مسألة : دورة ٢٠١٤ - ٢٠١٥ فصل أول

$\overset{\Delta}{OAB}$ صفيحة بشكل مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية في A وطول ضلعه القائم يساوي 2 تدور حول رأسها الثابت O بحيث يبقى ضلعها OA ملازماً للمستوي الثابت ox_1y_1 .

1- عين شعاع الدوران الآني في الجملة المماسكة مع الصفيحة

2- عين معادلات حركة الصفيحة وسرعة الرأس B علماً أن $|\vec{w}|=2$ و $|\vec{v}(A)|=2$.

الحل :



$\boxed{1}$

نختار جملة محاور ثابتة $o_1x_1y_1$ ونختار جملة محاور متماسكة مع الصفيحة oxy بحيث ينطبق ox على OA بما أن الحركة دورانية حول نقطة ثابتة عندئذ شعاع الدوران الآني

$$\vec{w} = \psi'\vec{k}_1 + \theta'\vec{u} + \varphi'\vec{k}$$

ولكن OA ملازم للمستوي ox ⇐ انطبق ou على ox

⇐ $\boxed{\varphi = 0}$

$$\Rightarrow \vec{w} = \psi'\vec{k}_1 + \theta'\vec{u}$$

نسقط $\vec{u}$ و $\vec{k}_1$ على الجملة المماسكة :

بما أن $\vec{ou}$ منطبق على $\vec{ox}$ إذاً $\vec{u}=\vec{i}$

لنسقط $\vec{k}_1$:

$$\vec{k}_1 = \sin\theta\,\vec{v} + \cos\theta\,\vec{k}$$

$$\vec{v} = \sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{k}_1 = \sin\theta.\sin\varphi\,\vec{i} + \sin\theta.\cos\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{k}_1 = 0\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{w} = \theta'\vec{i} + \psi'.\sin\theta\,\vec{j} + \psi'.\cos\theta\,\vec{k}}$$

$\boxed{2}$ معادلات حركة الصفيحة : ψ, φ, θ

$$|\vec{w}|^2 = \theta'^2 + \psi'^2.\sin^2\theta + \psi'^2.\cos^2\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{4 = \theta'^2 + \psi'^2} \;\; --- \;\; (I)$$

$$\vec{v}(A) = \vec{w} \wedge \vec{oA}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \theta' & \psi'.\sin\theta & \psi'.\cos\theta \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}(A) = 2\psi'.\cos\theta - 2\psi'.\cos\theta$$

$$|\vec{v}(A)|^2 = 4\psi'^2.\cos^2\theta + 4\psi'^2.\cos^2\theta$$

$$4 = 4\psi'^2 \Rightarrow \psi'^2 = 1$$

$$\Rightarrow \psi' = 1 \Rightarrow \boxed{\psi = t}$$

نعوض في (I) : نجد $\boxed{\theta = \sqrt{3}\,t}$

⇐ معادلات حركة الصفيحة هي $\boxed{\varphi=0}$ و $\boxed{\psi = t}$, $\boxed{\theta=\sqrt{3}\,t}$

حساب سرعة B :

أولاً من المثلث نجد حسب فيثاغورث $oB = 2\sqrt{2}$

وكذلك نجد الزاوية $\hat{AOB}=45$.

$$\vec{v}(B) = \vec{w}\wedge\vec{oB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \sqrt{3} & \sin\theta & \cos\theta \\ 2\sqrt{2}.\cos45 & 2\sqrt{2}.\sin45 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}(B) = (-2\sqrt{2}.\sin45.\cos\theta)\,\vec{i} +$$
$$+ (2\sqrt{2}\cos45.\cos\theta)\,\vec{j} +$$
$$+ (2\sqrt{6}.\sin45 - 2\sqrt{2}\cos45.\sin\theta)\,\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{v}(B) = (-2\cos\theta,\; 2\cos\theta,\; 2\sqrt{3} - 2\sin\theta)}$$

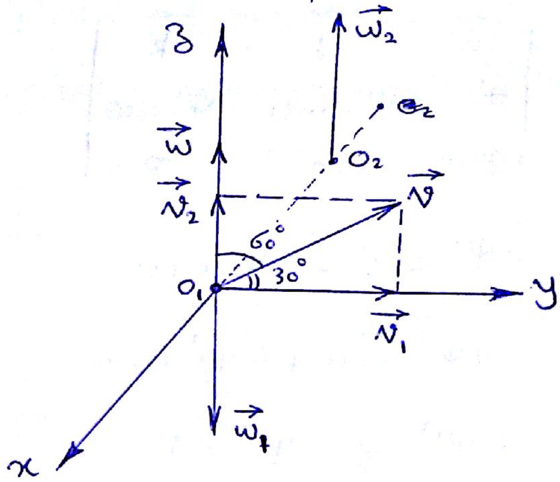
مسألة: دورة 2014-2015 فصل أول

تدور أسطوانة حول محورها بسرعة زاوية w

وتنسحب الأسطوانة مع محورها بسرعة انسحابية

$\vec{v}$ تصنع زاوية α تساوي 60° مع محور الأسطوانة

- عين عناصر الحركة المحصلة. ثم أكتب عبارة السرعة المطلقة لنقطة ما M من الأسطوانة.



الحل:

نلاحظ أن الدوران والانسحاب متقاطعين في مستوٍ واحد

لذلك نفرق الانسحاب إلى انسحابين:

ويكون: $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

$$\vec{v}_1 = v.\sin 60^\circ \ \vec{j} = \frac{\sqrt{3}}{2} v \ \vec{j} \quad \cdots (*)$$

$$\vec{v}_2 = v.\cos 60^\circ \ \vec{k} = \frac{v}{2} \ \vec{k} \quad \cdots (**)$$

لكن $\vec{v}_1 \perp \vec{w}$ إذاً نفرق $\vec{v}_1$ لدورانين $\vec{w}_1$ و $\vec{w}_2$

بحيث يكون $\vec{w}_1$ يعاكس مباشرة $\vec{w}$

وبحيث يكون $\vec{w}_2$ يوازي $\vec{w}$ ومطبق في نقطة O_2

الآن لنوجد O_2:

$$\vec{v}_1 = \vec{w}_2 \wedge \vec{O_2O_1}$$

$(*)$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} v \ \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & w_2 = w \\ -x_2 & -y_2 & -z_2 \end{vmatrix}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} v \ \vec{j} = y_2 w \ \vec{i} - x_2 w \ \vec{j}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = y_2 w \Rightarrow y_2 = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} v = -x_2 w \Rightarrow x_2 = -\frac{v\sqrt{3}}{2w} \\ \forall z_2 \end{cases}$$

باختيار $z_2 = 0$ ⇐ $O_2\left(-\frac{v\sqrt{3}}{2w}, 0, 0\right)$

فالنقطة O_2 واقعة على الجزء السالب من O_1x

من جهة أخرى $\vec{v}_2 = \vec{w}$ إذاً:

$$\vec{v}_2 = b\vec{w}$$

$$\overset{(**)}{\Rightarrow} \frac{v}{2}\vec{k} = b w \vec{k}$$

$$\Rightarrow \frac{v}{2} = b w \Rightarrow \boxed{b = \frac{v}{2w}}$$

- عبارة شعاع السرعة المطلقة:

$$\vec{V}_a(M) = \vec{v}_2 + \vec{v}_1 = b\vec{w} + \vec{w}_2 \wedge \vec{O_2O_1}$$

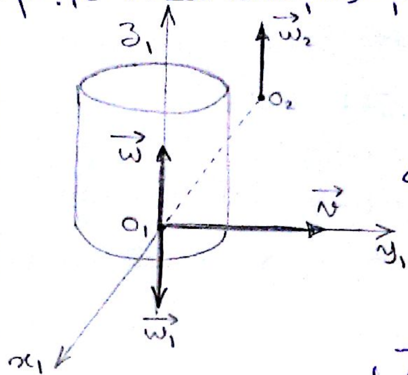
$$\Rightarrow \vec{V}_a(M) = \frac{v}{2w}\vec{w} + \vec{w}_2 \wedge \vec{O_2O_1}$$

والحركة المحصلة هي حركة عامة.

b: خطوة الحركة اللولبية المماسة.

مسألة: (تركيب انسحاب ودوران بحيث $\vec{\omega} \perp \vec{v}$)

تدور أسطوانة حول محورها بسرعة زاوية $\vec{\omega}$ وتنسحب في اتجاه يعامد محورها بسرعة قدرها $\vec{v}$ والمطلوب عين المحور الآني للدوران والسرعة المطلقة لنقطة ما من الجسم.



الحل:

نلاحظ أن $\vec{v} \perp \vec{\omega}$

نقوم بتفريق الانسحاب إلى دورانين متعاكسين في مستوٍ واحد. وبالتالي:

$$\vec{v} = \vec{\omega}_2 \wedge \vec{O_2O_1} \Rightarrow v\vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_2 = \omega \\ -x_2 & -y_2 & -z_2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow v\vec{j} = y_2 \omega \vec{i} - x_2 \omega \vec{j}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = y_2 \omega \Rightarrow y_2 = 0 \\ v = -x_2 \omega \Rightarrow x_2 = -\dfrac{v}{\omega} \\ \forall z_2 \end{cases}$$

باختيار $z_2 = 0 \Leftarrow O_2\left(-\frac{v}{\omega}, 0, 0\right)$

أي أن محور الدوران الآني يمر من O_2

والحركة المحصلة هي دوران بسيط يساوي ويوازي $\vec{\omega}$ ومطبق في O_2.

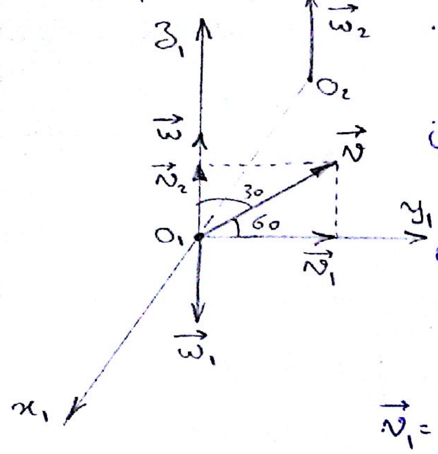
السرعة المطلقة لنقطة ما M هي:

$$\vec{V}_a(M) = \vec{\omega}_2 \wedge \vec{O_2M} = \vec{\omega} \wedge \vec{O_2M}$$

وهو المطلوب.

مسألة: (تركيب انسحاب ودوران متقاطعين في مستوٍ واحد)

تدور أسطوانة حول محورها بسرعة زاوية ω وتنسحب مع محورها بسرعة v بحيث تصنع v زاوية $\alpha = 30°$ مع ω. عين عناصر الحركة المحصلة واكتب السرعة المطلقة لنقطة ما M من الأسطوانة.



الحل:

الدوران والانسحاب متقاطعين في مستوٍ واحد.

نفرق الانسحاب لانسحابين

$$\Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

$$\vec{v}_1 = v \cdot \cos 60° \, \vec{j} = \frac{v}{2} \vec{j}$$

$$\vec{v}_2 = v \cdot \cos 30° \, \vec{k} = \frac{\sqrt{3}}{2} v \vec{k}$$

وبما أن $\vec{v}_1 \perp \vec{\omega}$ نفرق $\vec{v}_1$ لدورانين $\vec{\omega}_1$ و $\vec{\omega}_2$ بحيث $\vec{\omega}_1$ يعاكس مباشرة $\vec{\omega}$ و $\vec{\omega}_2$ يوازي $\vec{\omega}$ ومطبق في O_2

الآن نوجد O_2:

$$\vec{v}_1 = \vec{\omega}_2 \wedge \vec{O_2O_1} \Rightarrow \frac{v}{2}\vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_2 = \omega \\ -x_2 & -y_2 & -z_2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{v}{2}\vec{j} = y_2 \omega \vec{i} - x_2 \omega \vec{j}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = y_2 \omega \Rightarrow y_2 = 0 \\ \dfrac{v}{2} = -x_2 \omega \Rightarrow x_2 = -\dfrac{v}{2\omega} \\ \forall z_2 \end{cases}$$

باختيار $z_2 = 0 \Leftarrow O_2\left(-\frac{v}{2\omega}, 0, 0\right)$ (أي تقع على ox_1 في الجهة السالبة)

ولدينا أيضاً:

$$\vec{v}_2 \parallel \vec{\omega} \Rightarrow \vec{v}_2 = b\vec{\omega} = b\omega_2 \vec{k}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} v \vec{k} = b\omega \vec{k} \Rightarrow \boxed{b = \frac{v\sqrt{3}}{2\omega}}$$

$$\vec{V}_a(M) = \vec{v}_2 + \vec{v}_1 = b\vec{\omega} + \vec{\omega}_2 \wedge \vec{O_2O_1}$$

$$\Rightarrow V_a(M) = \frac{v\sqrt{3}}{2\omega}\vec{\omega} + \vec{\omega}_2 \wedge \vec{O_2O_1}$$

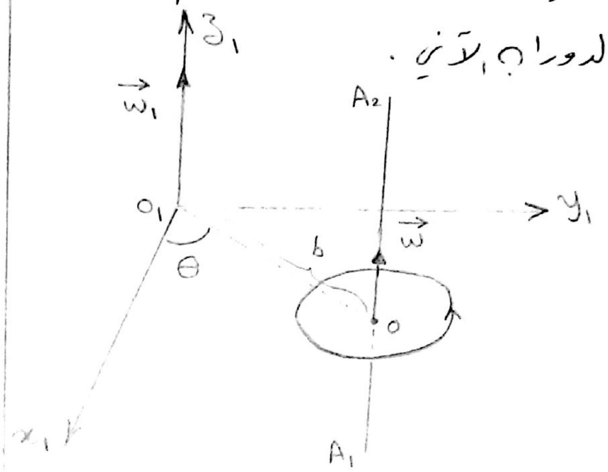
والحركة المحصلة هي حركة عامة ~~ومنه الحركة اللولبية~~

~~الحلزونية~~

مسألة : (تركيب حركتين دورانيتين)

يدور قرص دائري نصف قطره a حول محور شاقولي A_1A_2 بسرعة زاوية ثابتة w على دوران عقارب الساعة ويدور A_1A_2 حول محور شاقولي O_1z_1 يبعد عنه بمقدار b وبسرعة زاوية ثابتة w_1 وبنفس جهة دوران القرص . المطلوب :

عين المحور الآني للدوران ونقطة تقاطعه مع القرص وشعاع الدوران الآني .



الحل :

- نلاحظ أن الحركتين النسبية والجرية هي حركة دورانية فالحركة المحصلة هي حركة دورانية .
- كما أن الدوران يتم بنفس الجهة ⇐ $w \parallel w_1$ وهما ليسا متعاكسين مباشرة (الحالة الثانية)
- إذاً المحور الآني للدوران يمر من نقطة C وهي مركز النقطتين O_1 , O (C تقسم O_1O داخلاً)
- يمكن تعيين C من العلاقة :

$$\frac{\overrightarrow{O_1C}}{\overrightarrow{OC}} = -\frac{w}{w_1} \quad ---- \ (\bigstar)$$

من الرسم نلاحظ :

$O_1(0,0,0)$, $O(b.\cos\theta , b.\sin\theta , 0)$

$C(x,y,z)$, $\vec{w_1}=(0,0,w_1)$, $\vec{w}=(0,0,w)$

$\Rightarrow \overrightarrow{O_1C}=(x,y,z)$

$\overrightarrow{OC}=(x-b.\cos\theta , y-b.\sin\theta , z)$

نعوض في $(\bigstar)$:

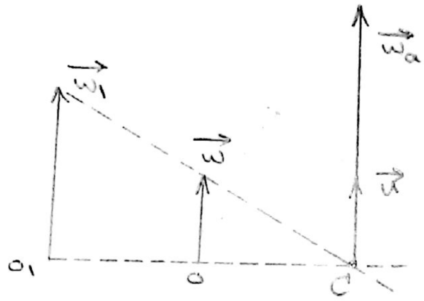
$$w_1(x,y,z)+w(x-b.\cos\theta , y-b.\sin\theta , z) = \vec{0}=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_1x+w(x-b.\cos\theta)=0 \\ w_1y+w(y-b.\sin\theta)=0 \\ w_1z+wz=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (w_1+w)\,x = bw.\cos\theta \\ (w_1+w)\,y = bw.\sin\theta \\ (w_1+w)\,z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{bw.\cos\theta}{w_1+w} \\ y = \dfrac{bw.\sin\theta}{w_1+w} \\ z = 0 \end{cases}$$

وهي إحداثيات C



ولدينا من الفرض : $\theta'=w_1 \Rightarrow \theta = w_1t+c$

بتعويض شروط البدء : $t=0$, $\theta=0$ ⇐ $c=0$

إذاً $\boxed{\theta=w_1t}$

نعوض في إحداثيات C :

$$C\left(\frac{bw.\cos w_1t}{w_1+w} , \frac{bw.\sin w_1t}{w_1+w} , 0\right).$$

شعاع الدوران الآني هو الشعاع الواقع على محور الدوران الآني :

$$\vec{w_a} = (w+w_1)\,\vec{u}$$

حيث $\vec{u}$: شعاع الواحدة الموازي لحامل كل من w و w_1

مسألة :

xoy زاوية صلبة قياسها $\frac{\pi}{4}$ تدور في المستوى الثابت $O_1x_1y_1$ حول رأسها الثابت O بسرعة زاوية $w=2t$ ويتحرك رأسها O على المستقيم الثابت O_1x_1 بسرعة ثابتة قيمتها العددية $|\vec{v}(o)| = v$.

M نقطة تتحرك بالنسبة للزاوية xoy وإحداثياتها بالنسبة للزاوية xoy هي (x,y) والمطلوب :

[1] تعيين معادلات حركة الزاوية xoy

[2] تعيين مركبات السرعة المطلقة والتسارع المطلق للنقطة M بدلالة الزمن وإحداثيات النقطة M ومشتقاتها (x',y') حيث : $x' = \frac{dx}{dt}$, $y' = \frac{dy}{dt}$

الحل :

- الحركة مستوية : نختار جملة محاور متماسكة مع الزاوية xoy ولتكن oXY بحيث ينطبق oX على ox .

إن معادلات الحركة المستوية هي (x_0, y_0) والزاوية θ وهي الزاوية بين مستقيم متماسك مع الزاوية ومستقيم ثابت في الجملة الثابتة . أي $\theta = (\widehat{oX, oX_1})$

وبالتالي :

$$x_0 = \int v\,dt = vt + c$$

بتعويض شروط البدء $t=0$ و $x_0=0$ $\Leftarrow$ $c=0$

$$\Rightarrow x_0 = vt$$

وبما أن O تتحرك على المستقيم O_1X_1 $\Leftarrow$ $y_0 = 0$

ولدينا

$$\theta' = w = 2t \Rightarrow \theta = t^2 + c_1$$

بتعويض شروط البدء $t=0$ و $\theta = 0$ $\Leftarrow$ $c_1 = 0$

$$\Rightarrow \theta = t^2$$

وبالتالي : معادلات الحركة هي

$$\boxed{x_0 = vt} \quad \boxed{y_0 = 0} \quad \boxed{\theta = t^2}$$

[2] إن إحداثيات M في الجملة غير المتعامدة xoy هي (x,y) $\Leftarrow$ $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

حيث : $\vec{i}$ و $\vec{j}$ أشعة الواحدة في الجملة غير المتعامدة ونفرض $\vec{I}, \vec{J}$ أشعة الواحدة في الجملة المتعامدة والمتماسكة مع الزاوية .

لنسقط $\vec{i}, \vec{j}$ على الجملة المتعامدة المتماسكة :

$$\Rightarrow \vec{OM} = x\vec{I} + y\left(\cos\frac{\pi}{4}\vec{I} + \sin\frac{\pi}{4}\vec{J}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{OM} = \left(x + \frac{y}{\sqrt{2}}\right)\vec{I} + \frac{y}{\sqrt{2}}\vec{J}$$

باشتقاق شعاع الموضع نحصل على السرعة النسبية :

$$\vec{V_r}(M) = \frac{d\vec{OM}}{dt}\Big|_M = \left(x' + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)\vec{I} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\vec{J}$$

- كما أن الحركة الجرية هي حركة مستوية :

$$\vec{V_e}(M) = \vec{V}(o) + \vec{w} \wedge \vec{OM}$$

$$= v\vec{I_1} + \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ 0 & 0 & 2t \\ x+\frac{y}{\sqrt{2}} & \frac{y}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix}$$

نسقط $\vec{I_1}$ على الجملة المتماسكة $\vec{I_1} = \cos\theta\,\vec{I} - \sin\theta\,\vec{J}$

$$\vec{V_e}(M) = v(\cos\theta\,\vec{I} - \sin\theta\,\vec{J}) - \sqrt{2}\,yt\,\vec{I}$$

$$+ (2x + \sqrt{2}y)t\,\vec{J} + 0$$

$$\Rightarrow \vec{V_e}(M) = (v.\cos\theta - \sqrt{2}yt)\vec{I} + (-v.\sin\theta + 2xt + \sqrt{2}yt)\vec{J}$$

$$\Rightarrow \vec{V_a}(M) = \vec{V_r}(M) + \vec{V_e}(M)$$

$$= - - - - - -$$

$$\vec{V}_a(M) = \left(x' + \frac{y'}{\sqrt{2}} + v.\cos t^2 - \sqrt{2}\, y t\right)\vec{I} +$$

$$+\left(\frac{y'}{\sqrt{2}} - v.\sin t^2 + 2xt + \sqrt{2}\, y t\right)\vec{J}$$

نحصل ع التسارع المطلق من العلاقة :

$$\vec{\Gamma}_a(M) = \frac{d\vec{V}_a(M)}{dt}\Big|_M + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_a(M)$$

$$* \quad \frac{d\vec{V}_a(M)}{dt}\Big|_M = \left(x'' + \frac{y''}{\sqrt{2}} - 2vt\sin t^2 - \sqrt{2}\, y - \sqrt{2}\, t y'\right)\vec{I}$$

$$+\left(\frac{y''}{\sqrt{2}} - 2vt.\cos t^2 + 2x + 2t x' + \sqrt{2}\, y + \sqrt{2}\, y' t\right)\vec{J}$$

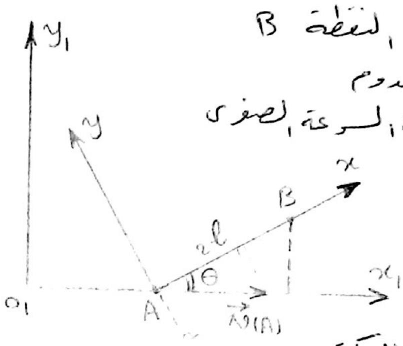
$$* \quad \vec{\omega} \wedge \vec{V}_a(M) = \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ 0 & 0 & 2t \\ V_{a_x} & V_{a_y} & \underbrace{V_{a_z}}_{=0} \end{vmatrix}$$

بالحساب نجد $\vec{\Gamma}_a(M)$.

مسألة : دورة ٠٨/٠٩ ١٠/٠٩

قضيب AB طوله $2l$ يتحرك في المستوي الثابت $o_1x_1y_1$ بحيث تنزلق النقطة A على o_1x_1 بسرعة ثابتة v وتتحرك النهاية B في المستوي $o_1x_1y_1$ بحيث تبقى سرعتها ثابتة v وكان القضيب في لحظة البدء منطبقاً على o_1y_1 :

1. عين معادلات حركة القضيب AB
2. أوجد مسار النقطة B
3. أوجد المركز الآني للدوران والقاعدة والمتدحرج
4. عين سرعة وتسارع النقطة B
5. عين مركز التسارع المعدوم
6. عين النقطة من القضيب ذات السرعة الصغرى



الحل : نختار جملة ثابتة $o_1x_1y_1$ وجملة متماسكة Axy بحيث AB هو أحد المحاور وليكن Ax ونختار A قطب للحركة.

وسطاء الحركة هي $x_1(A), y_1(A), \theta(\widehat{Ax, o_1x_1})$

$$x_1(A) = \int v\,dt = vt + c$$

لحظة البدء $A = o_1$ ، $t = 0 \Leftarrow c = 0$

$$\Rightarrow \boxed{x_1(A) = vt}$$

$$\boxed{y_1(A) = 0}$$

تعيين θ :

$$\vec{v}(B) = \vec{v}(A) + \vec{\omega} \wedge \vec{AB}$$

$$= v\vec{i_1} + \begin{vmatrix} \vec{i_1} & \vec{j_1} & \vec{k_1} \\ 0 & 0 & \omega = \theta' \\ 2l\cos\theta & 2l\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}(B) = (v - 2l\theta'\sin\theta)\vec{i_1} + (2l\theta'\cos\theta)\vec{j_1}$$

$$|\vec{v}(B)|^2 = (v - 2l\theta'\sin\theta)^2 + (2l\theta'\cos\theta)^2$$

$$v^2 = v^2 - 4vl\theta'\sin\theta + 4l^2\theta'^2\sin^2\theta + 4l^2\theta'^2\cos^2\theta$$

$$0 = -4vl\theta'\sin\theta + 4l^2\theta'^2$$

$$0 = 4l\theta'(-v\sin\theta + l\theta')$$

$$\Rightarrow -v\sin\theta + l\theta' = 0$$

$$\Rightarrow l\theta' = v\sin\theta$$

$$l\frac{d\theta}{dt} = v\sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{\sin\theta} = \frac{v}{l}dt$$

نفرض $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = t$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow d\theta = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

نكامل الطرفين :

$$\int \frac{d\theta}{\sin\theta} = \int \frac{v}{l}dt$$

$$* \int \frac{d\theta}{\sin\theta} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln t + c_1$$

$$* \int \frac{v}{l}dt = \frac{v}{l}t$$

$$\Rightarrow \ln\left|\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right| + c_1 = \frac{v}{l}t$$

لحظة البدء : $\theta = \frac{\pi}{2}$ (لأن AB كان منطبق على o_1y_1)

$t = 0 \Rightarrow 0 = c_1$

$$\Rightarrow \ln\left|\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right| = \frac{v}{l}t \quad \ldots\ldots (\star)$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = e^{\frac{v}{l}t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = 2.\operatorname{arctg} e^{\frac{v}{l}t}}$$

إذا كنا نريد $\vec{\omega}$:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{l}\cdot\sin\theta \Rightarrow \frac{v}{\omega} = \frac{l}{\sin\theta}$$

2. مسار النقطة B :

$$\vec{o_1B} = \vec{o_1A} + \vec{AB}$$

$$= vt\,\vec{i_1} + (2l\cos\theta)\vec{i_1} + (2l\sin\theta)\vec{j_1}$$

$$\Rightarrow x_B = vt + 2l\cos\theta$$

$$y_B = 2l\sin\theta$$

نقوم بحذف الوسيط t لذلك نضرب الحد الأول من x_B ب l ونقسمه على l ثم نبدل $\frac{v}{l}t$ ب $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right|$ وفق $(\star)$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_B = \ell \cdot \ln tg\frac{\theta}{2} + 2\ell\cdot\cos\theta \\ y_B = 2\ell\cdot\sin\theta \end{array}\right\}$$ المعادلات الوسيطية لمسار B

3] إيجاد المركز الآني للدوران :

$$\boxed{\vec{AI} = \frac{1}{\omega^2}\,\vec{\omega}\wedge\vec{v}(A)}$$

نفرض إحداثيات I هي . $I\left(X_1(I), Y_1(I)\right)$

في الجملة الثابتة

$$\Rightarrow \left(X_1(I)-X_1(A),\ Y_1(I)-Y_1(A)\right) = \frac{1}{\omega^2}\begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ 0 & 0 & \omega \\ v & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(X_1(I)-vt,\ Y_1(I)-0\right) = \frac{1}{\omega^2}\left(0,\ v\omega,\ 0\right)$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} X_1(I) = vt = \ell\cdot\ln tg\frac{\theta}{2} \\ Y_1(I) = \frac{v}{\omega} = \frac{\ell}{\sin\theta} \end{array}\right\}$$ المعادلات الوسيطية للقاعدة

نفرض إحداثيات I في المتحركة : $I\left(X(I), Y(I)\right)$

$$\Rightarrow \left(X(I)-x_A,\ Y(I)-y_A\right) = \frac{1}{\omega^2}\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega \\ v\cdot\cos\theta & -v\cdot\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(X(I)-0,\ Y(I)-0\right) = \frac{1}{\omega^2}\left(\omega v\cdot\sin\theta,\ \omega v\cdot\cos\theta\right)$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} X(I) = \frac{v}{\omega}\cdot\sin\theta = \ell \\ Y(I) = \frac{v}{\omega}\cdot\cos\theta \end{array}\right\}$$ المعادلات الوسيطية للمتدحرج

المتدحرج هو محور القضيب AB .

4] سرعة وتسارع B :

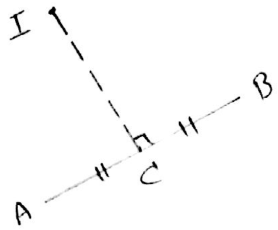
نشتق مركبات B وتابع

$$\vec{v}(B) \left\langle \begin{array}{l} x'_B = \\ y'_B = \end{array}\right.$$

$$\vec{\Gamma}(B) \left\langle \begin{array}{l} x''_B = \\ y''_B = \end{array}\right.$$

5] إن مركز التسارع المعدوم هو النقطة A لأن سرعتها ثابتة بالنسبة للجملة المتحركة وبالتالي تسارعها معدوم

6] إن النقطة ذات السرعة الصغرى هي التي تقابل أقل بُعد عن المركز الآني للدوران I



وهي النقطة C الواقعة في منتصف القضيب .

مسألة :

ذراع O_1A طوله a يدور في مستوٍ ثابت بسرعة زاوية ثابتة ω_1 حول النقطة الثابتة O_1.

AB ذراع آخر طوله $2a$ مرتبط مفصلياً مع O_1A بحيث تنزلق النقطة B على مستقيم ثابت O_1x_1

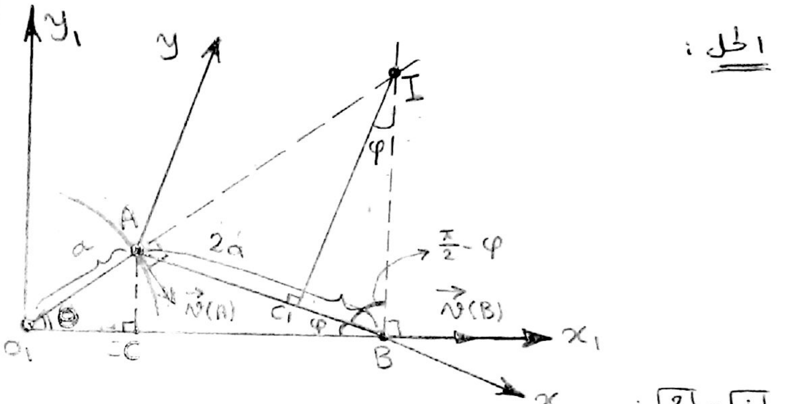
1] عين المركز الآني لدوران القضيب AB ومعادلات الحركة

2] عين القاعدة والمتدحرج

3] عين سرعة وتسارع النقطة B

4] عين سرعة وتسارع B عندما تكون الزاوية BO_1A إما 0 أو $30°$

الحل :



1] و 2] :

نختار جملة محاور ثابتة $O_1x_1y_1$ وجملة متماسكة Axy مع القضيب AB بحيث A مبدأ الجملة هي قطب الحركة

الحركة مستوية ومعادلة حركة AB هي :

$$x_1(A),\ y_1(A),\ \varphi(A\hat{x}, O_1x_1)$$

نسقط A على الجملة الثابتة نجد :

$$x_1(A)=a\cos\theta \qquad y_1(A)=a\sin\theta$$

لكن $\theta=\int\omega_1\,dt=\omega_1 t+c \Leftarrow \theta'=\omega_1$

شروط البدء : $t=0$ و $\theta=0 \Leftarrow c=0 \Leftarrow \boxed{\theta=\omega_1 t}$

$$\Rightarrow \boxed{x_1(A)=a\cos\omega_1 t} \qquad \boxed{y_1(A)=a\sin\omega_1 t}$$

تعيين φ :

من المثلث O_1AC : $AC=a\sin\theta$

من المثلث ABC : $AC=2a\sin\varphi$

$$\Rightarrow 2\sin\varphi=\sin\theta \Rightarrow \sin\varphi=\frac{1}{2}\sin\theta \quad (*)$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi=\arcsin\left(\frac{1}{2}\sin\theta\right)}$$

تعيين المركز الآني للدوران :

في الجملة الثابتة : نفرض إحداثيات $I(X_1(I),Y_1(I))$

$$X_1(I)=|\vec{O_1C}|+|\vec{CB}|$$
$$=a\cos\theta+2a\cos\varphi$$
$$=a\cos\theta+2a\sqrt{1-\frac{\sin^2\theta}{4}} \quad \text{حسب } (*)$$

$$X_1(I)=a\cos\theta+a\sqrt{4-\sin^2\theta}$$
$$Y_1(I)=O_1B\cdot tg\,\theta$$

المعادلات الوسيطية للقاعدة

في الجملة المتماسكة : $I(X(I),Y(I))$

$$X(I)=AC_1=AB-C_1B=2a-C_1B$$

حساب C_1B : من المثلث C_1IB :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\frac{C_1B}{BI}$$

$$\Rightarrow C_1B=BI\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$$

من المثلث O_1BI نجد : $\Rightarrow C_1B=O_1B\cdot tg\,\theta\cdot\sin\varphi$

$$\Rightarrow C_1B=O_1B\cdot tg\,\theta\cdot\frac{\sin\theta}{2}$$

$$\Rightarrow C_1B=O_1B\cdot\frac{\sin^2\theta}{2\cos\theta}$$

$$\Rightarrow X(I)=2a-O_1B\,\frac{\sin^2\theta}{2\cos\theta}$$

من C_1IB : $Y(I)=C_1I=BI\cdot\cos\varphi$

$$Y(I)=\frac{O_1B\cdot tg\,\theta}{2}\sqrt{4-\sin^2\theta}$$

المعادلتين الوسيطيتين للمتدحرج

3] تعيين سرعة وتسارع B.

$$\vec{v}(B)=\vec{v}(A)+\vec{\omega}\wedge\vec{AB}$$

نشتق مركبات A

$$=(-a\omega_1\sin\omega_1 t,\ a\omega_1\cos\omega_1 t,\ 0)+\begin{vmatrix}\vec{i_1} & \vec{j_1} & \vec{k_1}\\ 0 & 0 & \theta'\\ X_1(B)-X_1(A) & Y_1(B)-Y_1(A) & 0\end{vmatrix}$$

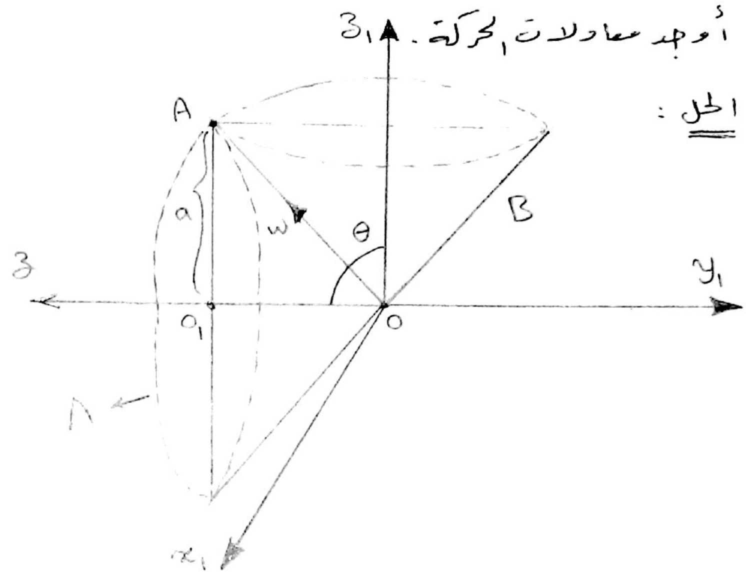
ونتابع

Scanned by CamScanner

مسألة :   دورة ٢٠٠٩ - ٢٠١٠

مخروط دوراني A زاويته الرأسية $\frac{\pi}{2}$ ورأسه O ثابت يتدحرج دون انزلاق على السطح الخارجي لمخروط ثابت B زاويته الرأسية $\frac{\pi}{2}$ ورأسه محوره Oz_1 ونصف قطر قاعدة المخروط A يساوي a . والقيمة العددية لسرعة O_1 مركز قاعدة المخروط A ثابتة $v=4a$.

أوجد معادلات الحركة.



الحل :

$$\vec{\omega} = \psi'\vec{k}_1 + \theta'\vec{u} + \varphi'\vec{k}$$

ومن الفرض لدينا : $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta' = 0$

θ : هي الزاوية بين محوري المخروطين وبالتالي :

$$\vec{\omega} = \psi'\vec{k}_1 + \varphi'\vec{k} \quad \cdots (\bigstar)$$

إن حركة O_1 دورانية حول O إذاً

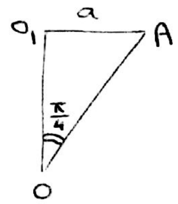
$$\vec{v}(O_1) = \vec{\omega} \wedge \vec{OO_1}$$

$$|\vec{v}(O_1)| = |\vec{\omega}| . |OO_1| . \sin(\vec{\omega} \hat{,} \vec{OO_1})$$

حيث ω : هو المحور الآني للدوران وهو الخط المشترك

- إيجاد $\vec{OO_1}$: من المثلث القائم OO_1A :

$$tg\frac{\pi}{4} = \frac{a}{O_1O} = 1$$



$$\Rightarrow O_1O = a$$

$$\Rightarrow 4a = |\vec{\omega}| . a . \sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{|\vec{\omega}| = 4\sqrt{2}}$$

كذلك :

$$\vec{v}(O_1) = \vec{\omega} \wedge \vec{O_1O}$$
$$= (\psi'\vec{k}_1 + \varphi'\vec{k}) \wedge \vec{O_1O}$$
$$= (\psi'\vec{k}_1 \wedge \vec{O_1O}) + \underbrace{(\varphi'\vec{k} \wedge \vec{O_1O})}_{=0}$$

$$\Rightarrow |\vec{v}(O_1)| = |\psi'\vec{k}_1 \wedge \vec{O_1O}|$$
$$= |\psi'| . |a| . \sin(\vec{k}_1 \hat{,} \vec{k})$$

$$\Rightarrow 4a = |\psi'| . |a| . \sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow |\psi'| = 4$$

$$\Rightarrow \psi' = 4 \Rightarrow \psi = 4t + c_1$$

بتعويض شروط البدء : $t=0$, $\psi=0$ $\Leftarrow$ $c_1 = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\psi = 4t}$$

بالعودة للعلاقة $(\bigstar)$:

$$\vec{\omega} = \psi'\vec{k}_1 + \varphi'\vec{k}$$

$$\omega^2 = \psi'^2(\vec{k}_1)^2 + \varphi'^2(\vec{k})^2 + 2\psi'\varphi'\underbrace{(\vec{k}_1 . \vec{k})}_{=0}$$

$$\Rightarrow \omega^2 = (4)^2 + \varphi'^2$$

$$(4\sqrt{2})^2 = 16 + \varphi'^2$$

$$\Rightarrow \varphi'^2 = 32 - 16 = 16 \Rightarrow \varphi' = 4$$

$$\Rightarrow \varphi = 4t + c_2$$

بتعويض شروط البدء : $t=0$, $\varphi=0$ $\Leftarrow$ $c_2 = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = 4t}$$

وبالتالي معادلات الحركة هي

$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad , \quad \psi = 4t \quad , \quad \varphi = 4t$$

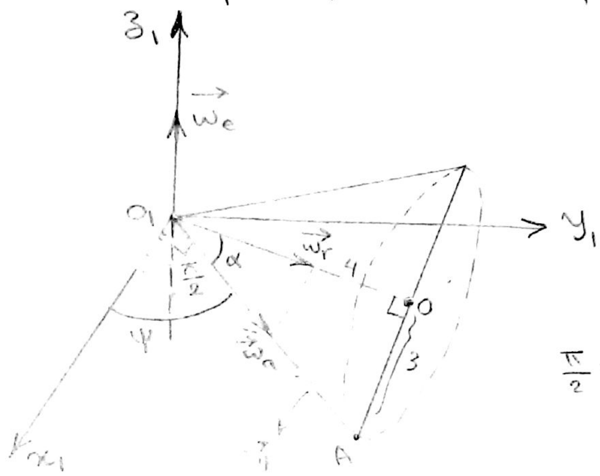
مسألة : دورة ١٢/١٢ تكميلي

يتدحرج مخروط دوراني ارتفاعه $h = 4cm$ ونصف قطر قاعدته $r = 3\,cm$ دون انزلاق على المستوي الأفقي المثبت $O_1x_1y_1$ بحيث يبقى رأسه O_1 ثابتاً . ونصف زاويته الرأسية α

علماً أن القيمة العددية لسرعة مركز قاعدته O هي $|\vec{v}(O)| = 48\ cm/s$ والمطلوب :

- عين شعاع الدوران الجري للمخروط حول O_1z_1
- عين شعاع الدوران الآني له بدلالة الزمن .

الحل :



$$\frac{\pi}{2} = (\omega_e \hat{,} \omega_a)$$

الحل : الحركة دورانية حول نقطة ثابتة ، سنعتبرها دورانية حول محور آني يمر من تلك النقطة . وليكن ω_a .

إن الحركة هي تركيب حركتين :

نسبية : دوران المخروط حول O_1O

جرية : دوران المخروط حول O_1z_1

وبما أن الحركة تدحرج دون انزلاق ⇐ سرع نقاط التماس معدومة

وبما أن : $\vec{v}(O_1) = \vec{0}$ و $\vec{v}(A) = \vec{0}$ ⇐ $\vec{O_1A}$ هو المحور الآني

ω_a محمول على $\vec{O_1A}$

وبما أن $O_1x_1y_1$ عمودي على O_1z_1 فإن $O_1A_1 \perp O_1z_1$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} = (O_1z_1 \hat{,} O_1A)$$

$$\Rightarrow \vec{\omega}_e = \omega_e \vec{k}_1 = \psi' \vec{k}_1$$

- إيجاد ψ :

$$\vec{v}(O) = \vec{\omega}_a \wedge \vec{O_1O}$$

$$|\vec{v}(O)| = |\vec{\omega}_a| \cdot |\vec{O_1O}| \cdot \sin(\vec{\omega}_a , \vec{O_1O})$$

$$|\vec{v}(O)| = |\vec{\omega}_a| \cdot |\vec{O_1O}| \cdot \sin\alpha$$

لنحسب $\sin\alpha$ من المثلث القائم OO_1A :

حسب فيثاغورث :

$$(O_1A)^2 = (O_1O)^2 + (OA)^2$$

$$= 16 + 9 = 25$$

$$\Rightarrow O_1A = 5 \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{3}{5} \ , \ \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

نعوض الآن :

$$48 = \omega_a \cdot 4 \cdot \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_a = 20} \ Re/s.$$

كما أن :

$$\vec{v}(O) = \vec{\omega}_a \wedge \vec{O_1O} = (\vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r) \wedge \vec{O_1O}$$

$$= \vec{\omega}_e \wedge \vec{O_1O} + \underbrace{\vec{\omega}_r \wedge \vec{O_1O}}_{0}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(O) = \vec{\omega}_e \wedge \vec{O_1O}$$

$$|\vec{v}(O)| = |\vec{\omega}_e| \cdot |\vec{O_1O}| \cdot \sin(\vec{\omega}_e \hat{,} \vec{O_1O})$$

$$|\vec{v}(O)| = |\vec{\omega}_e| \cdot |\vec{O_1O}| \cdot \cos\alpha$$

لأن الزاوية بين $\vec{\omega}_e$ و $\vec{O_1O}$ هي $(\frac{\pi}{2} + \alpha)$

$$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha$$

$$\Rightarrow 48 = \omega_e \cdot 4 \cdot \frac{4}{5} \Rightarrow \boxed{\omega_e = 15} \ Re/s.$$

وهو شعاع الدوران الجري للمخروط

ومنه نجد :

$$\psi' = 15 \Rightarrow \psi = 15t + c$$

بتعويض شروط البدء $t = 0$ و $\psi = 0$ ⇐ $c = 0$

$$\Rightarrow \psi = 15t$$

شعاع الدوران الآني بدلالة الزمن :

$$\vec{\omega}_a = 20\,\vec{u} = 20(\cos\psi\,\vec{i}_1 + \sin\psi\,\vec{j}_1)$$

$$\vec{\omega}_a = 20 \cdot \cos 15t\,\vec{i}_1 + 20 \cdot \sin 15t\,\vec{j}_1$$

دورة ١٢/١١ ١٠/٩ ١٢/١٢ ف١

مسألة :

$O_1x_1y_1$ محوران متعامدان في مستوٍ ثابت و Δ مستقيم يتدحرج دون انزلاق على محيط دائرة ثابتة مركزها O_1 ونصف قطرها (1) بحيث تبقى السرعة الزاوية لدوران النقطة C (نقطة التماس بين المستقيم والدائرة) ثابتة وتساوي ω .

M نقطة مادية تتحرك على المستقيم Δ بسرعة منتظمة v في لحظة البدء كان المستقيم Δ مماساً للدائرة في النقطة $A(1,0)$ وكانت M في A أيضاً .

$\boxed{1}$ عين المركز الآني للدوران والقاعدة والمتدحرج

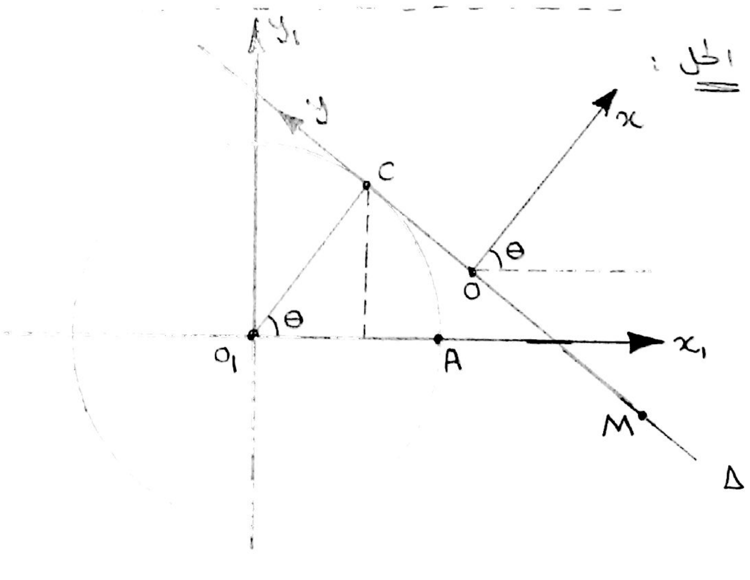
$\boxed{2}$ عين الإحداثيات المطلقة للنقطة M ثم عين السرعة النسبية والجرية والمطلقة ثم التسارع المطلق في الجملة المتماسكة

$\boxed{3}$ عين العلاقة التي تربط بين v و ω كي يكون التسارع المطلق محمولاً على Δ .

$\boxed{4}$ بفرض أن ω تابع للزمن والسرعة المطلقة لـ M ثابتة وتساوي $v\sqrt{2}$ أثبت أن المعادلة التفاضلية الناتجة هي

$$\theta'^2 (vt - \theta)^2 = v^2$$

الحل :



$\boxed{1}$ الحركة مستوية ، وبما أن الحركة تدحرج دون انزلاق فإن المركز الآني للدوران هو نقطة التماس C .

القاعدة هي الدائرة والمتدحرج هو المستقيم

$\boxed{2}$

$$\vec{O_1M} = \vec{O_1C} + \vec{CM}$$

$$\vec{O_1M} = \cos\theta\,\vec{i_1} + \sin\theta\,\vec{j_1} + \vec{CM} \quad \dots (*)$$

لكن :

$$\vec{CM} = \vec{CO} + \vec{OM} \quad \dots (**)$$

من الفرض لدينا :

$$|\vec{v}(M)| = v$$

تكامل الطرفين :

$$OM = \int v\,dt = vt + c_0$$

شروط البدء $t=0$ و $OM = 0 \Leftarrow c_0 = 0$

$$\Rightarrow OM = vt \Rightarrow \vec{OM} = vt\,\vec{j}$$

ولدينا :

$$|\vec{CO}| = |\widehat{CA}| = r\theta = \theta$$

ولكن :

$$\theta' = \omega \Rightarrow \theta = \omega t + c_1$$

نعوض شروط البدء $t=0$ و $\theta = 0 \Leftarrow c_1 = 0$

ومنه $\theta = \omega t \Leftarrow |\vec{CO}| = \omega t$

وبالتالي

$$\vec{CO} = -\omega t\,\vec{j}$$

نعوض في $(**)$:

$$\vec{CM} = \vec{CO} + \vec{OM} = -\omega t\,\vec{j} + vt\,\vec{j} = (v-\omega)t\,\vec{j}$$

الآن نقوم بإسقاط الواحدة $\vec{j}$ على الجملة الثابتة :

$$\vec{CM} = (v-\omega)t\,(-\sin\theta\,\vec{i_1} + \cos\theta\,\vec{j_1})$$

$$\vec{CM} = (v-\omega)t\,(-\sin\omega t\,\vec{i_1} + \cos\omega t\,\vec{j_1})$$

نعوض في $(*)$:

$$\vec{O_1M} = \cos\omega t\,\vec{i_1} + \sin\omega t\,\vec{j_1} + (v-\omega)t\,(-\sin\omega t\,\vec{i_1} + \cos\omega t\,\vec{j_1})$$

$$\Rightarrow \vec{O_1M} = (\cos\omega t - (v-\omega)t\sin\omega t)\,\vec{i_1} + (\sin\omega t + (v-\omega)t\cos\omega t)\,\vec{j_1}$$

- الآن إيجاد السرعة المطلقة والتسارع المطلق :

- يمكن إيجاد السرعة المطلقة والتسارع المطلق بطريقتين

الأولى : باشتقاق شعاع الموضع السابق $\vec{O_1M}$

الثانية : عن طريق تركيب الحركات

- نوجد علاقة السرعة المطلقة والتسارع المطلق بطريقة تركيب الحركات . وذلك في الحلقة السابقة

$$\vec{V}_a(M) = \vec{V}_r(M) + \vec{V}_e(M)$$

$* \ \vec{V}_r(M) = \nu \vec{j}$ من الفرض

$* \ \vec{V}_e(M) = \vec{V}(C) + \vec{\omega} \wedge \vec{CM}$

لكن C هو المركز الآني للدوران $\Rightarrow \vec{V}(C) = \vec{0}$

$$\vec{V}_e(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{CM} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & (\nu-\omega)t & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{V}_e(M) = -\omega(\nu-\omega)t\,\vec{i}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_a(M) = (\omega^2 - \omega\nu)t\,\vec{i} + \nu\vec{j}$$

$$* \ \vec{\Gamma}_a(M) = \frac{d\vec{V}_a(M)}{dt}\Big|_{M} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_a(M)$$

$$\vec{\Gamma}_a(M) = (\omega^2 - \omega\nu)\vec{i} + 0\vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ (\omega^2-\omega\nu)t & \nu & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}_a(M) = (\omega^2 - \omega\nu)\vec{i} - \omega\nu\vec{i} + (\omega^3 - \omega^2\nu)t\,\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}_a(M) = (\omega^2 - 2\omega\nu)\vec{i} + (\omega^3 - \omega^2\nu)t\,\vec{j}$$

$\boxed{3}$ حتى يكون $\vec{\Gamma}_a(M)$ محمولاً على Δ يجب أن يكون

$$\omega^2 - 2\omega\nu = 0 \Rightarrow \boxed{\omega = 2\nu}$$

$\boxed{4}$