المحاضرة الثانية - عشرة ..

الخميس ٣٠ / ٤ / 2015

- القياسات العقدية ومبرهنة رادون نيكوديم -

القياس العقدي:

ليكن $(\mathcal{X}, \mathcal{S})$ فضاءً قيوساً

ولنفرض: $\mu : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ تابع مجموعاتي يحقق:

- $\mu(\phi) = 0$
- $\mu\left(\biguplus A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

(حيث $\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n)| < \infty$)

إذا كان m جبر تام من أجزاء $\mathcal{X}$ ولنفرض:

$$\lambda = |\mu| : m \to \overline{\mathbb{R}}_+$$
$$E \mapsto \lambda(E) = |\mu|(E)$$

$$|\mu|(E) = \sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(E_n)| ; \biguplus E_n = E\right\}$$

$$\lambda(E) = |\mu|(E) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(E_n)| \quad , \quad \{E_n\} \in \tau(E)$$

$\tau(E)$ هي مجموعة التجزئات المتعلقة بالمجموعة E

$$\lambda(E) = |\mu|(E) \geqslant |\mu(E)|$$

$|\mu|$ سندعوه التغير الكلي لـ μ

كل قياس عقدي يوافقه قياس موجب محدود.

$$|\mu|(E) = \sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(E_n)| ; \biguplus E_n = E\right\}$$

مبرهنة:

التغير الكلي $|\mu|$ لقياس عقدي على جبر تام $\mathfrak{M}$ هو قياس موجب على $\mathfrak{M}$

مبرهنة:

إذا كان μ قياساً عقدياً على X فإنّ $|\mu|(X) < +\infty$

مبرهنة وتعريف:

إذا كان μ, μ_1, μ_2 قياسات عقدية على الجبر التام $\mathfrak{M}$ وكان $\alpha \in \mathbb{C}$ فإننا نضع تعريفاً:

- $\forall E \in \mathfrak{M} : (\mu_1 + \mu_2)(E) = \mu_1(E) + \mu_2(E) \qquad \forall E \in \mathfrak{M}$
- $(\alpha\mu)(E) = \alpha\mu(E) \qquad \forall E \in \mathfrak{M}$
- $\|\mu\| = |\mu|(X)$

فعندئذٍ يكون $\mu_1 + \mu_2$ و $\alpha\mu$ قياسين عقديين ويكون $\|.\|$ نظيم على فضاءات القياسات العقدية.

ص ١٢٢ • إنّ القياس الحقيقي هو حالة خاصة من القياس العقدي.

$$\mu : S \longrightarrow \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

إذا وضعنا $\mu^{-} = \frac{|\mu| - \mu}{2} \geq 0$ ، $\mu^{+} = \frac{|\mu| + \mu}{2} \geq 0$

التغير السالب لـ μ ، التغير الموجب لـ μ

فإنّ:

$$|\mu| = \mu^{+} + \mu^{-}$$

$$\mu = \mu^{+} - \mu^{-}$$

كل قياس عقدي هو فرق لقياسين موجبين ويدعى هذا التفريق تفريق جوردان لـ μ

يمكن أن نكتب القياس العقدي بالشكل:

$$\nu = \nu_1 + i\,\nu_2$$

حيث أنّ كلاً من ν_1 ، ν_2 قياسين حقيقيين.

فإذا كان:

$$m \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}$$
$$E \longmapsto \mu_1(E) - \mu_2(E) = \mu(E)$$

حيث μ_2 ، μ_1 موجبان محدودان

فإنّ:

$$m \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$E \longmapsto \mu(E) = \mu_1(E) + i\mu_2(E)$$

$$\mu(E) = \underbrace{(\lambda_1(E) - \lambda_2(E))}_{\text{حقيقي}} + i\underbrace{(\lambda_3(E) - \lambda_4(E))}_{\text{حقيقي}}$$

الاستمرار المطلق:

تعريف:
ليكن μ قياساً موجباً على الجبر التام m من أجزاء مجموعة $X \neq \emptyset$ وليكن λ قياساً موجباً أو حقيقياً أو عقدياً على الجبر التام m، نقول إنّ λ مطلق الاستمرار بالنسبة لـ μ إذا وفقط إذا:

$$\forall E \in m : \mu(E) = 0 \Rightarrow \lambda(E) = 0$$

أثبت أنه إذا كان $\mu \geq \lambda \geq 0$ ⟸ $\lambda \ll \mu$

$$\forall E \in m \quad \mu(E) = 0$$

فإنّ: $0 = \mu(E) \geq \lambda(E) \geq 0$
$$\Rightarrow \lambda(E) = 0$$

هل العكس صحيح؟

لنأخذ $\mu = 10\lambda$

إنّ $\forall A \quad \lambda(A) \leq \mu(A) \Leftrightarrow \lambda \leq \mu$

$$\lambda(A) = 5 \rightarrow \mu(A) = 50$$

العكس ليس صحيح بالضرورة.

مبرهنة أساسية:

لنفرض أنّ $\lambda_2, \lambda_1, \lambda, \nu$ قياسات على الجبر التام $\mathcal{M}$ وأنّ ν قياس موجب. عندئذٍ تتحقق الخواص التالية:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 \ll \nu \\ \lambda_2 \ll \nu \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 \ll \nu$$

$$\lambda \ll \nu \Rightarrow |\lambda| \ll \nu$$

- إنّ كل دالة قيوسة موجبة تولد قياس موجب

فإنّ:

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu$$

$$\nu \ll \mu$$

والعكس هو مبرهنة رادون نيكوديم:

إذا كان λ و ν قياسين موجبين محدودين على الجبر التام $\mathcal{M}$ من أجزاء مجموعة $X \neq \phi$ عندئذٍ:

$$\lambda \ll \nu \Leftrightarrow \exists f \in L^1(\mu), \ h \geq 0 ; \lambda(E) = \int_E f \, d\nu \quad : \forall E \in \mathcal{M}$$

انظر ص 132 التمارين 1-4

عودة إلى بعض أنماط التقارب في نظرية القياس:

1- $f_n \xrightarrow{\text{نقطياً}} f$

$$\forall x \in X : f_n(x) \to f(x)$$

2- $f_n \xrightarrow{L^1} f$

$$\int |f_n - f| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

3- $f_n \xrightarrow{a.e} f$ $\quad$ f_n تتقارب غالباً في كل مكان نحو f

$$\mu(\{x : f_n(x) \not\to f(x)\}) = 0$$

4. f_n تتقارب نحو f بالنسبة إلى القياس μ $\quad f_n \xrightarrow{\mu} f$

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ if } a_n = \mu\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$$

$$\text{then } a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

5. التقارب بالوسط:

تعريف: ليكن $1 \leq p$، ولتكن $(f_n)_{n \geq 1}$ متتالية من الدوال القيوسة بحيث تكون $|f_n|^p$ كمولة،
أي يكون $1 \leq n$، ولتكن f دالة قيوسة بحيث تكون $|f|^p$ كمولة.
نقول عن المتتالية $(f_n)_{n \geq 1}$ إنها تتقارب بالوسط من المرتبة p من الدالة f إذا كانت

$$\lim_{n \to \infty} \int_X |f_n - f|^p d\mu = 0$$

وعندئذ نكتب: $\lim_{n \to \infty} f_n = f \quad (m^p)$ أو $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{m^p} f$

6. f_n تتقارب بانتظام نحو f $\quad f_n \xrightarrow[X]{u} f$

$$\|f_n - f\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

7. f_n تتقارب بانتظام تقريباً من الدالة f $\quad f_n \xrightarrow{a.u} f$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A : f_n \xrightarrow[A]{u} f \quad , \mu(A^c) < \varepsilon$$

مبرهنة (مبرهنة إيغوروف):
إذا كانت (f_n) متتالية من الدوال القيوسة، متقاربة غالباً في كل مكان على X من الدالة f
وكان $\infty > \mu(X)$ فإنه توجد من أجل كل $0 < \varepsilon$ مجموعة قيوسة A بحيث يكون $\mu(A^c) < \varepsilon$
بحيث تتقارب $(f_n)_{n \geq 1}$ بانتظام من الدالة f على A.

انتهت المحاضرة الثانية عشرة..