"ملحق 5"

الأحد 2015/4/26 ..

تمارين صفحة ٩٤ ..

[1]. محلول صفحة ١٩٥ : فكرته تذكر أنه إذا كانت $\varphi : (X, \mathcal{S}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة درجية

$$\varphi = \sum \alpha_i \, \chi_{A_i}$$

فإنّ $\int_E \varphi \, d\mu = \sum \alpha_i \, \mu(A_i \cap E)$

ثم خذ $E = F \cup G$ حيث $F \cap G = \phi$ واحسب طرفي العلاقة $\int_{F\cup G} \varphi \, d\mu = \int_F \varphi \, d\mu + \int_G \varphi \, d\mu$

تعليق :

إذا وضع $\nu : E \in \mathcal{S} \longrightarrow \nu(E) = \int_E \varphi \, d\mu$ فأثبت أنّ ν قياس موجب. ماذا تستنتج ؟

ν كقيد ما حققه أي قياس موجب من خواص :

$$\text{if } E_1 \subseteq E_2 \text{ then } \nu(E_1) \leq \nu(E_2)$$

$$\int_{E_1} \varphi \, d\mu \leq \int_{E_2} \varphi \, d\mu$$

[2]. محلول صفحة ١٩٦ نقول : $\varphi = \sum_i \alpha_i \, \chi_{E_i}$ و $\psi = \sum_j \beta_j \, \chi_{F_j}$

$$\Rightarrow \quad \psi = \sum_j \sum_i \beta_j \, \chi_{F_j \cap E_i} \quad , \varphi = \sum_i \sum_j \alpha_i \, \chi_{E_i \cap F_j}$$

ويكون : $\varphi + \psi = \sum_i \sum_j (\alpha_i + \beta_j) \, \chi_{E_i \cap F_j}$

ثم نحسب تكامل كل من φ و ψ و $\varphi + \psi$ فنجد المراد .

[3]. محلول صفحة ١٩٧ : $f \geq 0$ و $g \geq 0$ قيوسان موجبان في $(X, \mathcal{S}, \mu)$

نريد إثبات أنّ : $\int (f + g) = \int f + \int g$

فكرة الحل :

نستفيد من التمرين السابق ومن كون : كل دالة قيوسة موجبة هي نهاية لمتتالية متزايدة من الدوال الدرجية ثم نستخدم مبرهنة التقارب المتزايد (لوبيغ ١)

4. نتيجة (مبرهنة Beppo_Lévi)

$f_n \geq 0$ قيوسة موجبة لكل $n \Leftarrow \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n$

محلول في صفحة ١٩٧ : فكرة الحل : استخدم التمرين المحلول رقم 3 ثم مبرهنة لوبيغ الأولى

وتذكر أن : $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ..

5. يهتم إليه السطران اللذان يسبقانه

لدينا $f = g - h$ ونريد إثبات أن $\int f = \int g - \int h$ حيث f تكامل و h, g كذلك :

فكرة الحل تماثل فكرة حل التمرين 6 وتكتب $f = f^+ - f^-$ و $g = g^+ - g^-$ و $h = h^+ - h^-$ فنجد

$f^+ - f^- = (g^+ - g^-) - (h^+ - h^-)$

7. يستبدل بالمبرهنة الأساسية صفحة ٩١ ثم نتابع كما في الصفحة ١٩٨

تتمة وتمرين

من أنماط التقارب في نظرية القياس :

1- $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} f \iff \int |f_n - f|^p \to 0$ حيث $1 \leq p < \infty$

2- $f_n \xrightarrow{a.e} f \iff \mu(\{x : f_n(x) \not\to f(x)\}) = 0$

(f_n) تتقارب غالباً في كل مكان نحو f

3- $f_n \xrightarrow{\mu} f \iff \forall \varepsilon > 0$ if $\alpha_n = \mu\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$ then $\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

(f_n) تتقارب نحو f بالنسبة للقياس μ.

عندما $\mu = P$ احتمال على $(X, \mathcal{B})$ نقول (f_n) تسعى نحو f باحتمال أو بالنسبة إلى القياس الاحتمالي P .

برهن أن $\left.\begin{array}{l} f_n \xrightarrow{*} f \\ g_n \xrightarrow{*} g \end{array}\right\} \Rightarrow f_n + g_n \xrightarrow{*} f + g$

حيث $* \in \{\mathcal{L}^1, a.e, \mu\}$