مبادئ الهندسة الإسقاطية

د . يوسف الوادي

طباعة : يوسف رهيجة

ملاحظة: هذا القسم أضافه الدكتور يوسف للمقرر وقال أنه مطلوب امتحانياً..

Rehab

بعض مبادئ الهندسة الإسقاطية

1. الاحداثيات المتجانسة لنقطة في المستوي:

في المستوي الأفيني A^2 نأخذ جملة احداثية ما ونرمز لإحداثيات أي نقطة في هذا المستوي ب (x_1, x_2)

نفرض $\sum$ مجموعة الثلاثيات المرتبة $[y_0, y_1, y_2]$ حيث $y_0, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ حيث $y_0 \neq 0$ ،

ونكون مقابلة بين عناصر $\sum$ ونقاط A^2 كما يلي :

نقول انه يوجد مقابلة بين ثلاثية $[y_0, y_1, y_2]$ ونقطة $p \in A^2$ حيث $p(x_1, x_2)$ إذا تحقق :

$$x_1 = \frac{y_1}{y_0}, x_2 = \frac{y_2}{y_0}, y_0 \neq 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

بهذه الطريقة نجد أن كل ثلاثية $[y_0, y_1, y_2]$ تقابل نقطة وحيدة من A^2 ~~ودرجة ثابتة~~ إذا حققت الاعداد y_0, y_1, y_2 ، x_1, x_2 العلاقات (1) فانه لكل $\lambda \in \mathbb{R}$ $(\lambda \neq 0)$ فإن الأعداد

$x_1, x_2, \lambda y_0, \lambda y_1, \lambda y_2$ تحقق (1) أيضا وبالتالي يقابل كل نقطة من A^2 عدد لا نهائي من الثلاثيات $[y_0, y_1, y_2]$

فإذا فرضنا أن الثلاثيات $[y_0, y_1, y_2], [z_0, z_1, z_2]$ تقابل نفس النقطة $p(x_1, x_2)$ عندئذ يكون

$$x_1 = \frac{y_1}{y_0} = \frac{z_1}{z_0}.$$

$$x_2 = \frac{y_2}{y_0} = \frac{z_2}{z_0}$$ حيث $(y_0 \neq 0, z_0 \neq 0)$.

فإذا فرضنا $z_0 = \lambda y_0$ نجد: $z_1 = \lambda y_1$ و $z_2 = \lambda y_2$.

وعليه إذا قابلت الثلاثية $[y_0, y_1, y_2]$ نقطة مفروضة $p \in A^2$ فإن مجموعة الثلاثيات التي تقابل p هي :

$$\{ [\lambda y_0, \lambda y_1, \lambda y_2] ; 0 \neq \lambda \in \mathbb{R} \}$$

تسمى الأعداد المرتبة y_0, y_1, y_2 بالإحداثيات المتجانسة للنقطة p .

مما سبق نلاحظ أن الإحداثيات المتجانسة لنقطة p ليست وحيدة التعيين .

ملاحظات:

نفرض $p(x_1, x_2)$ نقطة في المستوي الأفيني A^2 حيث p تختلف عن المبدأ $A_0(0,0)$ وليكن $\mathbb{R} \ni \lambda \neq 0$ ولنفرض نقطة $t \in A^2$ احداثياها $(\lambda x_1, \lambda x_2)$ عندئذ تقع النقطتان

p, t على مستقيم مار بالمبدأ.

نلاحظ أيضا أن الأعداد y_0, y_1, y_2 المعرفة ب :

$$y_0 = \frac{1}{y}, y_1 = x_1, y_2 = x_2 \dots\dots\dots \quad (2)$$

هي إحداثيات متجانسة للنقطة t لأن :

$$\frac{y_1}{y_0} = \frac{y_1}{\frac{1}{\lambda}} = \lambda y_1 = \lambda x_1$$

$$\frac{y_2}{y_0} = \frac{y_2}{\frac{1}{\lambda}} = \lambda y_2 = \lambda x_2$$

إحداثيات t الأفينية .

فإذا فرضنا أن λ متغير(متحول) ويسعى الى ∞ فنجد أن النقطة t الواقعة دوما على المستقيم A_0p تبتعد الى ∞ والعدد $y_0 \to 0$ (إن الإجراء السابق يفترض أن A_0, p تعينان مستقيم أي أن p ليست في المبدأ $(p \neq (0,0)$).

نقاط اللانهاية للمستوي:

لقد فرضنا فيما سبق ثلاثية من الأعداد $[y_0, y_1, y_2]$ بشرط $y_0 \neq 0$ ووجدنا أن كل ثلاثية من هذا النوع تقابل نقطة في المستوي الأفيني فإذا تجاوزنا الشرط $y_0 \neq 0$ وأخذنا ثلاثيات من الأعداد الحقيقية من الشكل $[0, y_1, y_2]$ حيث أحد العددين y_1, y_2 على الأقل مغاير للصفر فنجد أن مثل هذه الثلاثيات لا تمثل أي نقطة في المستوي الأفيني ولذلك فإننا سندخل نقاطا جديدة :

تعريف:

كل ثلاثية مرتبة $[0, y_1, y_2]$ (حيث واحد على الاقل من y_1, y_2 مغاير للصفر) تدعى نقطة لانهاية (نقطة افتراضية) للمستوي A^2 .

في العادة نسمي نقاط المستوي A^2 نقاط حقيقية (*pure*)

بينما تدعى نقاط اللانهاية نقاط غير حقيقية أو افتراضية .

وتجدر الملاحظة ان الثلاثية $[0,0,0]$ أبعدت ولا يقابلها أي نقطة .

نقول عن نقطتين افتراضيتين من A^2 إنهما متساويتان : $[0, z_1, z_2] = [0, y_1, y_2]$

إذا وجد $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ بحيث : $z_1 = \lambda y_1$ و $z_2 = \lambda y_2$.

تعريف:

إن تمديد (توسعة) المستوي بإضافة النقاط الافتراضية يدعى المستوي الإسقاطي .

أو المستوي الإسقاطي هو المستوي الناتج عن توسعة (تمديد) المستوي الأفيني بإضافة النقاط الافتراضية .

$y_i \neq 0$

إذا المستوي الإسقاطي يتكون من جميع النقاط $[y_0, y_1, y_2]$ حيث أحدها على الأقل لا يساوي الصفر .

نرمز للمستوي الإسقاطي ب $\mathbb{P}^2$ وهو الناتج عن A^2 .

وبالتعريف فإن : $\dim\mathbb{P}^2 = \dim A^2 = 2$.

فإذا كانت (g) مستقيما في A^2 فإن معادلته :

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0 \quad ; \quad {a_1}^2 + {a_2}^2 \neq 0$$

فإذا أدخلنا الاحداثيات المتجانسة المعرفة ب :

$$x_1 = \frac{y_1}{y_0}, x_2 = \frac{y_2}{y_0} \; ; \; y_0 \neq 0$$

لوجدنا :

$$a_0 y_0 + a_1 y_1 + a_2 y_2 = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

حيث أن : $a_1{}^2 + a_2{}^2 \neq 0$.

إذا تقع النقطة $[y_0, y_1, y_2]$ تماما على g عندما تحقق y_0, y_1, y_2 العلاقات الأخيرة

فإذا انطلقنا من المعادلة 3 وحاولنا البحث عن وجود نقطة افتراضية $[0, y_1, y_2]$ من المستوي $\mathbb{R}^2$ والتي تحقق 3 .

أي لنبحث عن الثلاثيات $[y_0, y_1, y_2]$ يتحقق من أجلها :

$$a_0 y_0 + a_1 y_1 + a_2 y_2 = 0 \; , y_0 = 0 \; , y_1{}^2 + y_2{}^2 \neq 0 \; \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

وينتج من هذه المعادلة : $a_1 y_1 + a_2 y_2 = 0$.

وكون $a_1{}^2 + a_2{}^2 \neq 0$ فرضا فيمكن اعتبار $a_1 \neq 0$ وبالتالي $y_1 = -\frac{a_2}{a_1} y_2$

وبالتالي : $(5) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad y_1 = \lambda y_2 \; ; \; \lambda = -\frac{a_2}{a_1}$.

نختار كيفيا $y_2 \neq 0$ ونحسب من (5) y_1 وبهذه الطريقة نجد نقطة افتراضية $[0, y_1, y_2]$ والتي تحقق (3) .

وعلى الرغم من أن y_2 اختيرت عشوائيا فإننا نرى أن النقطة الافتراضية وحيدة لأن :

لو فرضنا $[0, z_1, z_2]$ تحقق (3) عندئذ : $z_1 = \lambda z_2$ ومنه يوجد $0 \neq \mu \in \mathbb{R}$ بحيث:

$$y_1 = \mu z_1 \quad , \quad y_2 = \mu z_2$$

وبالتالي فإن الثلاثيات $[0, y_1, y_2]$, $[0, z_1, z_2]$ تمثل نفس النقطة .

والآن نقوم بتكوين المسلمة التالية :

إذا حققت نقطة افتراضية ما المعادلة (3) فإننا نعتبر هذه النقطة نقطة من المستقيم .

وبالتالي يوجد على كل مستقيم نقطة افتراضية واحدة .

المستقيم الإسقاطي هو مستقيم أفيني محدد بواسطة نقطته الافتراضية .

أي إذا مددنا المستقيم الأفيني بإضافة نقطته الافتراضية فإن الناتج يدعى مستقيم إسقاطي .

. لنفرض من جديد المعادلة :

$$a_0y_0 + a_1y_1 + a_2y_2 = 0 \quad ; \quad a_1{}^2 + a_2{}^2 \neq 0$$

فإذا خرجنا من هذا الشرط أي ليكن : $a_1 = a_2 = 0$ عندئذ ينتج عن المعادلة الأخيرة :

$$a_0y_0 = 0$$

فإذا كان $a_0 = 0$ فالمعادلة الأخيرة محققة من أجل كل الثلاثيات $[y_0, y_1, y_2]$ وهذه الحالة ليست ذات أهمية .

ليكن $a_0 \neq 0$ عندئذ تتحقق المعادلة الأخيرة عندما : $y_0 = 0$ أي من أجل النقاط الافتراضية فقط للمستوي $\mathbb{P}^2$.

من كل ما سبق يمكن صياغة التعريف التالي :

تعريف :

تسمى مجموعة النقاط الافتراضية للمستوي بالمستقيم الافتراضي .

أيضا مما سبق يمكن صياغة المبرهنة التالية :

مبرهنة :

إذا كان أحد الثوابت a_0, a_1, a_2 على الأقل لا يساوي الصفر عندئذ كل معادلة متجانسة :

$$a_0y_0 + a_1y_1 + a_2y_2 = 0$$

تمثل مستقيما في المستوي الإسقاطي .

ملاحظة:

كما نعلم في المستوي الأفيني يمر من نقطتين مختلفتين مستقيم وحيد ، بعد إدخال النقاط الافتراضية فإن قضية مشابهة تصبح في المستوي الإسقاطي :

مبرهنة :

لتكن P, Q نقطتين متمايزتين من $\mathbb{P}^2$ احداثياتهما المتجانسة : $P[\beta_0, \beta_1, \beta_2]$

$Q[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2]$ عندئذ المستقيم الممثل بالمعادلة :

$$a_0y_0 + a_1y_1 + a_2y_2 = 0 \quad ; \quad a_0{}^2 + a_1{}^2 + a_2{}^2 \neq 0$$

يمر بالنقطتين : P, Q إذا تحققت الجملة :

$a_0\beta_0 + a_1\beta_1 + a_2\beta_2 = 0$, $a_0\alpha_0 + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 = 0$ ……… $(*)$

لذلك يكفي أن نعين a_0, a_1, a_2 من هذه الجملة .

بما أن P, Q متمايزتان فإن رتبة المصفوفة :

$$\begin{matrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{matrix}$$

تساوي 2 .

أي يوجد حل غير تافه للجملة $(*)$

وليكن هذا الحل $\grave{a}_0, \grave{a}_1, \grave{a}_2$ وهو وحيد.

أي يوجد مستقيم وحيد مار من P, Q .

تقاطع مستقيمين :

نفرض في $\mathbb{P}^2$ مستقيمين :

$$(1) \;\ldots\ldots\ldots\; a_0y_0 + a_1y_1 + a_2y_2 = 0 \quad ; \quad {a_0}^2 + {a_1}^2 + {a_2}^2 \neq 0$$

$$(2) \;\ldots\ldots\ldots\; b_0y_0 + b_1y_1 + b_2y_2 = 0 \quad ; \quad {b_0}^2 + {b_1}^2 + {b_2}^2 \neq 0$$

نبحث عن النقاط المشتركة بينهما لذلك نفرض المصفوفة :

$$M = \begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{matrix}$$

رتبة M ليست صفرا .

عندما تكون رتبة M تساوي الواحد فإن هناك تناسب بين معاملات (1) ومعاملات (2) وبالتالي فالمستقيمان منطبقان .

لنفرض ان رتبة M تساوي 2 عندئذ يوجد حل غير تافه لجملة المعادلتين (1) و (2) فإذا كان أحد الحلول هو : $[\eta_0, \eta_1, \eta_2] \neq [0,0,0]$ فتكون مجموعة حلول هذه الجملة :

$$\{\ [\lambda\eta_0, \lambda\eta_1, \lambda\eta_2]\ ;\ 0 \neq \lambda \in \mathbb{R}\}$$

وفي هذه الحالة توجد فقط نقطة تقاطع واحدة .

وكون اختيار المستقيمين تم بطريقة عشوائية فإنه ينتج عن ذلك:

في المستوي الإسقاطي يتقاطع المستقيمان المتوازيان المختلفان في نقطة واحدة فقط .

ومن جهة ثانية المستقيمان المتوازيان المختلفان لا يمكن ان يكون لهما نقطة مشتركة حقيقية في المستوي .

أي :

إنّ تقاطع مستقيمين متوازيين مختلفين هو نقطة افتراضية :

(يتقاطع المستقيمان المتوازيان المختلفان في نقطة افتراضية)

إذا أيا كان عدد المستقيمات المتوازية فإنها تتقاطع في نقطة افتراضية واحدة فقط .

انتهت المحاضرة .