★ النظرية الأساسية في حركة جسم صلب

الشرط اللازم والكافي لتتحرك مجموعة مادية كمجموعة متماسكة هو أن يتساوى مسقطا سرعتي نقطتين من هذه المجموعة على المستقيم الواصل بين النقطتين.

البرهان:

نفرض أن المجموعة المتماسكة S وأن $A,B \in S$

من تعريف الجسم الصلب نكتب علاقة البعد الثابت بين A,B

$$|\vec{AB}| = \vec{C} \iff (\vec{AB})^2 = c^2$$

نشتق:

$$2\,\vec{AB}\cdot \frac{d\vec{AB}}{dt} = 0$$

$$\iff \vec{AB}\cdot \frac{d\vec{AB}}{dt} = 0$$

$$\iff \vec{AB}\,\frac{d(\vec{oB}-\vec{oA})}{dt} = 0$$

$$\iff \vec{AB}\cdot\frac{d\vec{oB}}{dt} - \vec{AB}\,\frac{d\vec{oA}}{dt} = 0$$

$$\iff \vec{AB}\cdot\vec{v}(B) - \vec{AB}\cdot\vec{v}(A) = 0$$

$$\iff \vec{AB}\cdot\vec{v}(B) = \vec{AB}\cdot\vec{v}(A)$$

$$\iff |\vec{AB}|\cdot|\vec{v}(B)|\cdot\cos\theta_1 = |\vec{AB}|\cdot|\vec{v}(A)|\cdot\cos\theta_2$$

$$\iff |\vec{v}(B)|\cdot\cos\theta_1 = |\vec{v}(A)|\cdot\cos\theta_2$$

$$\iff \text{Proj}_{AB}\,\vec{v}(B) = \text{Proj}_{AB}\,\vec{v}(A)$$

★ إن شعاع الدوران لا يتعلق باختيار القطب في الحركة العامة

البرهان: ليكن A قطب للحركة عندئذ:

$$\forall M \in S:\ \vec{V}(M) = \vec{v}(A) + \vec{\omega}_A \wedge \vec{AM}$$

وليكن B قطب للحركة عندئذ:

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(B) + \vec{\omega}_B \wedge \vec{BM}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(B) + \vec{\omega}_B \wedge \vec{BM} = \vec{v}(A) + \vec{\omega}_A \wedge \vec{AM}$$

نفرض أن A هو قطب الحركة:

$$\Rightarrow \vec{v}(A) + \vec{\omega}_A \wedge \vec{AB} + \vec{\omega}_B \wedge \vec{BM} = \vec{v}(A) + \vec{\omega}_A \wedge \vec{AM}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega}_A \wedge \vec{AB} + \vec{\omega}_B \wedge \vec{BM} = \vec{\omega}_A \wedge \vec{AM}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega}_B \wedge \vec{BM} = \vec{\omega}_A \wedge \vec{AM} - \vec{\omega}_A \wedge \vec{AB}$$

$$\vec{\omega}_B \wedge \vec{BM} = \vec{\omega}_A \wedge (\vec{AM} - \vec{AB})$$

لدينا $\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BM} \Leftarrow \vec{AM} - \vec{AB} = \vec{BM}$

وبالتالي:

$$\vec{\omega}_B \wedge \vec{BM} = \vec{\omega}_A \wedge \vec{BM}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega}_A = \vec{\omega}_B = \vec{\omega}$$

وبالتالي:

$$\forall M \in S:\ \vec{v}(M) = \vec{v}(o) + \vec{\omega} \wedge \vec{oM}$$

حيث o: قطب الحركة

Scanned by CamScanner

☒ نظرية أولر - دالامبير :

الحركة الدورانية حول نقطة ثابتة هي حركة دورانية في كل لحظة حول محور آني يمر من تلك النقطة.

البرهان: ليكن S الجسم الصلب ولتكن $O, A, B \in S$ ثلاث نقاط غير واقعة على استقامة واحدة و O ثابتة ولنفرض أنه:

$$\vec{v}(A)\neq\vec{0},\ \vec{v}(B)\neq\vec{0},\ \vec{v}(A)\nparallel\vec{v}(B),\ \vec{v}(A)\neq\vec{v}(B)$$

أولاً: إذا كان:

$\vec{v}(A)=\vec{0}$ و $\vec{v}(O)=\vec{0}$ ⇐ OA محور آني للدوران

$\vec{v}(B)=\vec{0}$ و $\vec{v}(O)=\vec{0}$ ⇐ OB محور آني للدوران

ثانياً: إذا كان:

$\vec{v}(A)=\vec{v}(B)$ ⇐ الحركة انسحابية ولكن O ثابتة

إذاً $\vec{v}(A)\neq\vec{v}(B)$

ثالثاً: إذا كان:

$\vec{v}(A)\parallel\vec{v}(B)$ و $\vec{v}(A)\neq\vec{v}(B)$

عندئذ لا تتحقق نظرية المساقط.

★ نأخذ النقطتين O, A ونطبق نظرية المساقط:

$$\vec{OA}\cdot\vec{v}(A)=\vec{OA}\cdot\vec{v}(O)=\vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(A)\begin{cases} =\vec{0} \\ \perp \vec{OA}\end{cases}$$

نأخذ النقطتين O, B ونطبق نظرية المساقط:

$$\vec{OB}\cdot\vec{v}(B)=\vec{OB}\cdot\vec{v}(O)=\vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(B)\begin{cases} =\vec{0} \\ \perp \vec{OB}\end{cases}$$

- نرسم مستوٍ π_1 يحوي $\vec{OA}$ ويعامد $\vec{v}(A)$
- نرسم مستوٍ π_2 يحوي $\vec{OB}$ ويعامد $\vec{v}(B)$
- نأخذ نقطة A_1 من π_1
- نأخذ نقطة B_1 من π_2

نطبق نظرية المساقط على (O, A_1) ثم على (A, A_1):

$$\vec{OA_1}\cdot\vec{v}(A_1)=\vec{OA_1}\cdot\vec{v}(O)=\vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(A_1)\begin{cases} =\vec{0} \\ \perp \vec{OA_1}\end{cases} \quad \cdots \boxed{1}$$

$$\vec{AA_1}\cdot\vec{v}(A_1)=\vec{AA_1}\cdot\vec{v}(A)=\vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(A_1)\begin{cases} =\vec{0} \\ \perp \vec{AA_1}\end{cases} \quad \cdots \boxed{2}$$

$$\boxed{1} \text{ و } \boxed{2} \Rightarrow \vec{v}(A_1)\begin{cases} =\vec{0} \\ \perp \pi_1\end{cases} \quad \cdots (\star)$$

وبتطبيق نظرية المساقط على (O, B_1) ثم على (B, B_1) نجد

$$v(B_1)\begin{cases} =\vec{0} \\ \perp \pi_2\end{cases} \quad \cdots (\star\star)$$

ولكن $\vec{v}(A)$ لا يوازي $\vec{v}(B)$ ⇐ π_1 و π_2 متقاطعان في النقطة O

أي أنه يوجد فصل مشترك Δ. ولنبرهن أن سرع جميع نقاط Δ معدومة:

$$\forall O_1\in\Delta \begin{cases} O_1\in\pi_1 \Rightarrow \vec{v}(O_1)\begin{cases} =\vec{0} \\ \perp \pi_1\end{cases} \\ O_1\in\pi_2 \Rightarrow v(O_1)\begin{cases} =\vec{0} \\ \perp \pi_2\end{cases}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(O_1)\begin{cases} =\vec{0} \\ \perp(\pi_1\wedge\pi_2) \text{ مرفوض}\end{cases}$$

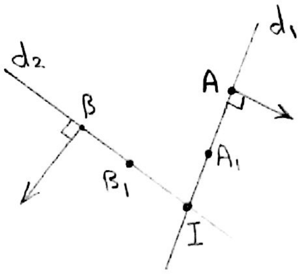
⇐ $\vec{v}(O_1)=\vec{0}$ وبالتالي سرع جميع نقاط Δ معدومة

⇐ Δ محور آني للدوران.

★ عيّن المركز الآني للدوران في الحركة المستوية هندسياً مميزاً الحالات المختلفة.

الحل: نختار A, B نقطتين من مستوي الحركة ونميز الحالات:

1 $\vec{v}(A)$ لا يوازي $\vec{v}(B)$



- نختار نقطة $A_1 \in d_1$
- ونطبق نظرية المساقط ⇐ (A, A_1)

$$Proj_{d_1} \vec{v}(A) = Proj_{d_1} \vec{v}(A_1) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(A_1) \begin{cases} = \vec{0} \\ \perp d_1 \end{cases}$$

- نختار نقطة $B_1 \in d_2$:

$$Proj_{d_2} \vec{v}(B) = Proj_{d_2} \vec{v}(B_1) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(B_1) \begin{cases} = \vec{0} \\ \perp d_2 \end{cases}$$

ولكن $\vec{v}(A)$ لا يوازي $\vec{v}(B)$ ⇐ d_1 لا يوازي d_2

⇐ d_1 و d_2 متقاطعان في نقطة ولتكن I .

حتى تكون I مركزاً آنياً للدوران يجب أن يتحقق $\vec{v}(I)=\vec{0}$

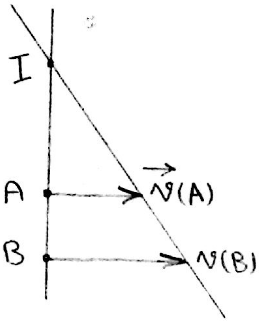
$$I \in d_1 \Rightarrow \vec{v}(I) \begin{cases} = \vec{0} \\ \perp d_1 \end{cases}$$

$$I \in d_2 \Rightarrow \vec{v}(I) \begin{cases} = \vec{0} \\ \perp d_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(I) \begin{cases} = \vec{0} \\ \perp (d_1 \wedge d_2) \quad \text{مرفوض} \end{cases}$$

$\Rightarrow \vec{v}(I) = \vec{0} \Rightarrow$ I مركز آني للدوران

2 $\vec{v}(A) \parallel \vec{v}(B)$ و $\vec{v}(A) \neq \vec{v}(B)$



$$\frac{|\vec{v}(A)|}{|\vec{IA}|} = \frac{|\vec{v}(B)|}{|\vec{IB}|}$$

وذلك لأن :

$$\vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{IM}$$

$$\Rightarrow |\vec{v}(M)| = |\vec{\omega}| . |\vec{IM}| . \sin\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow |\vec{\omega}| = \frac{|\vec{v}(M)|}{|\vec{IM}|}$$

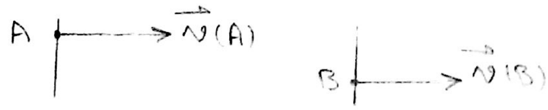
وكذلك نجد:

$$|\vec{\omega}| = \frac{|\vec{v}(A)|}{|\vec{IA}|} = \frac{|\vec{v}(B)|}{|\vec{IB}|}$$

إذاً I مركز آني للدوران.

فالمركز الآني للدوران في حالة التوازي وعدم التساوي هي نقطة تقاطع المستقيم الواصل بين نهايات السرع ومنحى $\vec{AB}$

3 $\vec{v}(A) \parallel \vec{v}(B)$ و $\vec{v}(A) = \vec{v}(B)$



- نظرية المساقط محققة دوماً

وبما أن السرع متساوية فالحركة انسحابية

عندئذ نقول إن الحركة هي دوران حول نقطة تقع في اللانهاية.

★ أثبت أن تسارع نقطة من جسم يتحرك بحركة مستوية يكتب بالشكل:

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{IM} - \omega^2 . \vec{IM} - \vec{\omega} \wedge \vec{u}$$

البرهان:

ليكن I المركز الآني للدوران هو قطب الحركة:

$$\forall M \in S : \vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{IM}$$

نشتق فنجد:

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{IM} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{IM}}{dt}$$

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{IM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{v}(M) - \vec{u})$$

حيث $\vec{u}$: سرعة انتقال I على القاعدة أو المتدحرج

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{IM} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}(M) - \vec{\omega} \wedge \vec{u}$$

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{IM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{IM}) - \vec{\omega} \wedge \vec{u}$$

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{IM} + \underbrace{(\vec{\omega} . \vec{IM})}_{=0} . \vec{\omega} - \omega^2 . \vec{IM} - \vec{\omega} \wedge \vec{u}$$

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{IM} - \omega^2 . \vec{IM} - \vec{\omega} \wedge \vec{u}$$

★ اكتب عبارة شعاع السرعة وشعاع التسارع في كل من الحالات الآتية مع شرح الرموز:

1) الحركة الدورانية حول محور ثابت

السرعة: * $\vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$

التسارع: * $\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)$

$\vec{\omega}$: شعاع الدوران ، $\vec{\varepsilon}$: شعاع التسارع الزاوي

$\vec{OM}$: شعاع الموضع للنقطة M.

2) الحركة الدورانية حول نقطة ثابتة:

* $\vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$

* $\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)$

3) الحركة المستوية:

* $\vec{v}(M) = \vec{v}(O) + \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$

* $\vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(O) + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)$

حيث O : قطب الحركة

4) الحركة المحصلة لنقطة مادية:

* $\vec{V}_a(M) = \vec{V}_r(M) + \vec{V}_e(M)$

حيث:

$\vec{V}_r(M) = \frac{d\vec{OM}}{dt}\Big|_M$ ، السرعة النسبية

$\vec{V}_e(M) = \vec{V}(O) + \vec{\omega}_e \wedge \vec{OM}$ ، السرعة الجرية

* $\vec{\Gamma}_a(M) = \vec{\Gamma}_r(M) + \vec{\Gamma}_e(M) + \vec{\Gamma}_c(M)$

حيث

نسبي $\vec{\Gamma}_r(M) = \frac{d\vec{V}_r(M)}{dt}\Big|_M$

جري $\vec{\Gamma}_e(M) = \vec{\Gamma}(O) + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} - \omega^2 \vec{OM}$

متمم $\vec{\Gamma}_c(M) = 2\vec{\omega}_e \wedge \vec{V}_r(M)$

★ أثبت أن شعاع التسارع لنقطة مادية M في حركتها المطلقة يعطى بالعلاقة الآتية :

$\vec{\Gamma}_a(M)=\vec{\Gamma}_r(M)+\vec{\Gamma}_e(M)+\vec{\Gamma}_c(M)$ واشرح رموز العلاقة .

الحل : نعطي علاقة التسارع من مشتق علاقة السرعة المطلقة لـ M :

$$\vec{V}_a(M)=\vec{V}_r(M)+\vec{V}_e(M)=\vec{V}_r(M)+\vec{V}(0)+\vec{w}_e\wedge\vec{OM}$$

$$\vec{\Gamma}_a(M)=\frac{d\vec{V}_a(M)}{dt}\Big|_F=\frac{d\vec{V}_r(M)}{dt}\Big|_F+\frac{d\vec{V}(0)}{dt}\Big|_F+\frac{d\vec{w}_e}{dt}\Big|_F\wedge\vec{OM}+\vec{w}_e\wedge\frac{d\vec{OM}}{dt}\Big|_F$$

$$=\frac{d\vec{V}_r(M)}{dt}\Big|_M+\vec{w}_e\wedge\vec{V}_r(M)+\vec{\Gamma}(0)+\vec{\varepsilon}\wedge\vec{OM}+\vec{w}_e\wedge\left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\Big|_M+\vec{w}_e\wedge\vec{OM}\right)$$

$$=\vec{\Gamma}_r(M)+\vec{w}_e\wedge\vec{V}_r(M)+\vec{\Gamma}(0)+\vec{\varepsilon}\wedge\vec{OM}+\vec{w}_e\wedge\frac{d\vec{OM}}{dt}\Big|_M+\vec{w}_e\wedge(\vec{w}_e\wedge\vec{OM})$$

$$=\vec{\Gamma}_r(M)+\vec{\Gamma}(0)+\vec{\varepsilon}\wedge\vec{OM}+\vec{w}_e\wedge\vec{V}_r(M)+\vec{w}_e\wedge\vec{V}_r(M)+(\vec{w}_e\cdot\vec{OM})\cdot\vec{w}_e-w_e^2\cdot\vec{OM}$$

$$=\underbrace{\vec{\Gamma}_r(M)}_{\text{نسبي}}+\underbrace{\vec{\Gamma}(0)+\vec{\varepsilon}\wedge\vec{OM}-w_e^2\cdot\vec{OM}}_{\text{جر}}+\underbrace{2\,\vec{w}_e\wedge\vec{V}_r(M)}_{\text{متمم}}$$

$$=\vec{\Gamma}_r(M)+\vec{\Gamma}_e(M)+\vec{\Gamma}_c(M)$$

حيث : . . . .

وينعدم $\vec{\Gamma}_c$ في الحالات الآتية : [1] $\vec{w}_e\parallel\vec{V}_r(M)$ [2] $\vec{w}_e=\vec{0}$ الحركة نسبية [3] $\vec{V}_r(M)=\vec{0}$ توازن نسبي

★ دساتير بور : نحصل على التسارع المطلق من خلال العلاقة :

$$\vec{\Gamma}_a(M)=\frac{d\vec{V}_a(M)}{dt}\Big|_F=\frac{d\vec{V}_a(M)}{dt}\Big|_M+\vec{w}_e\wedge\vec{V}_a(M)$$

$$=\left(\frac{dV_{a_x}}{dt},\frac{dV_{a_y}}{dt},\frac{dV_{a_z}}{dt}\right)+\begin{vmatrix} i & j & k\\ p & q & r\\ V_{a_x} & V_{a_y} & V_{a_z}\end{vmatrix}$$

وبفك هذه العلاقة نحصل على دساتير بور التي تعطينا التسارع المطلق في الجملة المتماسكة

$$\Gamma_{a_x}=\frac{dV_{a_x}}{dt}+q\cdot V_{a_z}-r\,V_{a_y}$$

$$\Gamma_{a_y}=\frac{dV_{a_y}}{dt}+r\cdot V_{a_x}-p\,V_{a_z}$$

$$\Gamma_{a_z}=\frac{dV_{a_z}}{dt}+p\,V_{a_y}-q\,V_{a_x}$$

ويكون $\vec{\Gamma}_a(M)=\Gamma_{a_x}\vec{i}+\Gamma_{a_y}\vec{j}+\Gamma_{a_z}\vec{k}$

جامعة دمشق　　　　　　　　ميكانيك (٢)　　　　　　　　الفصل الأول

كلية العلوم　　　　　　　　ثالثة رياضيات　　　　　　　　٢٠١٣-٢٠١٤

السؤال الأول: (٣٥ درجة)

أجب عن الأسئلة التالية :

١- أثبت أن شعاع الدوران الآني في الحركة العامة للجسم الصلب لا يتأثر باختيار القطب .

٢- اكتب عبارة شعاع السرعة وعبارة شعاع التسارع في كل من الحالات التالية مع شرح الرموز :

أ- الحركة الدورانية لجسم صلب حول محور ثابت　　　　جـ- الحركة المستوية لجسم صلب

ب - الحركة الدورانية لجسم صلب حول نقطة ثابتة　　　　د - الحركة المحصلة لنقطة مادية

السؤال الثاني : (٣٠ درجة)

يتحرك جسم صلب في الفراغ وفق المعادلات التالية :

$$x_o = t \quad , \quad y_o = t^2 \quad , \quad z_o = 1$$

$$\psi = t \quad , \quad \varphi = \sqrt{2}\ t \quad , \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

١) عين مركبات شعاع الدوران الآني على جملة إحداثيات ثابتة .

٢) عين شعاع سرعة النقطة M التي إحداثياتها على الجملة الثابتة هي x_1, y_1, z_1 بتابعية الزمن .

٣) عين عناصر الحركة اللولبية المماسة لحركة الجسم السابقة في اللحظة $t=0$.

السؤال الثالث : (٣٥ درجة)

$o_1 x_1 y_1$ محوران متعامدان في مستو ثابت ، Δ مستقيم يتدحرج دون انزلاق على محيط دائرة ثابتة مركزها o_1 ونصف قطرها الواحد ، بحيث تبقى السرعة الزاوية لدوران النقطة c نقطة تماس المستقيم مع الدائرة ثابتة وتساوي w ، M نقطه مادية تتحرك على المستقيم Δ بحركة منتظمة سرعتها ثابتة v .

في لحظة البدء كان المستقيم Δ مماساً للدائرة في النقطة $A(1,0)$ ، و كانت M في النقطة A أيضاً .

١- عين المركز الآني للدوران والقاعدة والمتدحرج .

٢- عين السرعة النسبية، و الجرية ، والمطلقة ، والتسارع المطلق للنقطة M في الجملة المتماسكة .

٣- تعيين العلاقة التي تربط v بـ w كي يكون التسارع المطلق محمولاً على Δ .

٤- بفرض أن w تابع للزمن و السرعة المطلقة للنقطة M ثابتة وتساوي $v\sqrt{2}$ أثبت أن المعادلة التفاضلية الناتجة هي :

$$\theta'^2 (vt - \theta)^2 = v^2$$

مع تمنياتي بالنجاح　　　　　　　　أ . هدى الشماط

جامعة دمشق	مقرر ميكانيك (2)	الدورة التكميلية
كلية العلوم	السنة الثالثة	2014-2013

السؤال الأول (35 درجة)

أجب عن الأسئلة التالية :

1- أثبت أن عبارة شعاع التسارع للنقطة مادية M من جسم صلب يتحرك بحركة مستوية

يمكن أن تكتب بالشكل: $\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{IM} - \omega^2 . \vec{IM} - \vec{\omega} \wedge \vec{u}$

2- أثبت أن الحركة الدورانية حول نقطة ثابتة هي حركة دورا نية في كل لحظة حول محورآني يمر من النقطة الثابتة .

السؤال الثاني : 30 درجة

يتدحرج مخروط دوراني ارتفاعه $h=8$ ونصف قطر قاعدته $R=6$ ونصف زاويته الرأسية α دون انزلاق على المستوي الأفقي الثابت $x_1o_1y_1$ بحيث يبقى رأسه o_1 ثابتاً علماً أن القيمة العددية لسرعة مركز قاعدة المخروط هي $v(o) = 96$ (o مركز قاعدة المخروط)

1) عين شعاع الوران الجري للمخروط حول o_1z_1 .

2) عين شعاع الدوران الآني له دلالة الزمن.

السؤال الثالث: (35درجة)

صفيحة بشكل مربع $OABC$ طول ضلعه $L=1$ تدور حول رأسها الثابت O بحيث يبقى ضلعها OA ملازماً للمستوي الثابت ox_1y_1 ، وبفرض أن سرعة النقطة A ثابتة قيمتها$(v(A)=1)$ ، والقيمة العددية لسرعة B تتعين من العلاقة : $v^2(B)=1+\cos^2\theta$ والمطلوب :

1- عين مركبات شعاع الدوران الآني على المحاور المتماسكة مع الصفيحة ، ومعادلات حركة هذه الصفيحة.

2- بفرض M نقطة تتحرك على OC بسرعة ثابتة قيمتها v ، عين السرعة المطلقة للنقطة M ، علماً أنها كانت في O في لحظة البدء .

انتهت الأسئلة

أ. هدى الشماط

جامعة دمشق　　　　ميكانيك (٢)　　　　الفصل الأول

كلية العلوم　　　　سنة ثالثة رياضيات　　　　٢٠١٤-٢٠١٥

السؤال الأول (٣٠ درجة):

١- أثبت أن شعاع الدوران الآني في الحركة العامة لجسم صلب لا يتأثر باختيار القطب .

٢- عين القاعدة والمتدحرج في حركة قضيب تنزلق نهاياته على مستقيمين متعامدين .

السؤال الثاني (٢٥درجة):

$\overset{\Delta}{oAB}$ صفيحة بشكل مثلث متساوي الساقين، قائم الزاوية في A، طول ضلعه القائم يساوي 2 .

تدور حول رأسها الثابت o ، بحيث يبقى ضلعها oA ملازماً للمستوي الثابت ox_1y_1 .

١- عين شعاع الدوران الآني في الجملة المتماسكة مع الصفيحة.

٢- عين معادلات حركة الصفيحة وسرعة الرأس B من الصفيحة وذلك بفرض أن $\left|\vec{w}\right| = 2$ ، $\left|\vec{v}(A)\right| = 2$

السؤال الثالث (٢٠ درجة):

تدور اسطوانة دائرية حول محورها بسرعة زاوية w ، وتنسحب الاسطوانة مع محورها بسرعة انسحابية $\vec{v}$ تصنع زاوية $\alpha = 60^\circ$ مع محور الاسطوانة .

عين عناصر الحركة المحصلة ، ثم اكتب عبارة السرعة المطلقة لنقطة ما M من الاسطوانة .

السؤال الرابع (٢٥ درجة):

تدور اسطوانة دائرية حول محورها بسرعة زاوية ثابتة w_e ، M نقطة تتحرك على سطح الاسطوانة حسب المعادلات :

$$x = 3\cos 2\pi t \quad , \quad y = 3\sin 2\pi t \quad , \quad z = 3t$$

بفرض x , y , z هي جملة متماسكة مع الاسطوانة ينطبق منها oz على محور الاسطوانة .

عيّن السرعة النسبية و الجرية و المطلقة للنقطة M ، والتسارع المطلق لها .

انتهت الأسئلة　　　　أ. هدى الشماط

* تركيب الحركات *

تركيب الحركات الانسحابية :

النسبية : انسحابية   الجرية : انسحابية

$$\forall M \in S : \begin{cases} \vec{V}_r(M) = \vec{V}_1 \\ \vec{V}_e(M) = \vec{V}_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_a(M) = \vec{V}_r(M) + \vec{V}_e(M) = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$$

المحصلة هي حركة انسحابية

تركيب الحركات الدورانية حول محاور دورانية :

النسبية : دورانية حول $\vec{\omega}_1$: $\vec{V}_r(M) = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{O_1M}$

الجرية : دورانية حول ω_2 : $\vec{V}_e(M) = \vec{\omega}_2 \wedge \vec{O_2M}$

$$\Rightarrow \vec{V}_a(M) = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{O_1M} + \vec{\omega}_2 \wedge \vec{O_2M}$$

ونميز حالات مختلفة :

1 الحالة الأولى : محاور الدوران متلاقية في نقطة O :

$$\Rightarrow \vec{V}_a(M) = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{OM} + \vec{\omega}_2 \wedge \vec{OM}$$

$$= (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \wedge \vec{OM} = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$$

فالحركة المحصلة في هذه الحالة هي دوران بسيط يمر من نقطة تلاقي المحورين O ويكون محور الدوران : $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$

---

2 الحالة الثانية : $\vec{\omega}_1 \parallel \vec{\omega}_2$ و $\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 \neq \vec{0}$

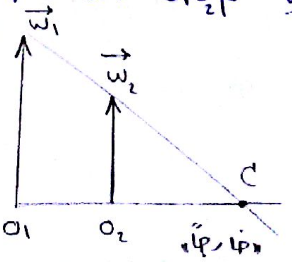
(ليسا متعاكسين مباشرة)

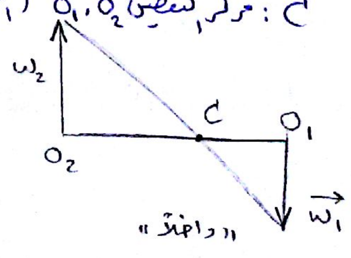
$$\vec{V}_a(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{CM}$$

عندئذ الحركة المحصلة دورانية وشعاع الدوران $\vec{\omega}$ مطبق (يمر) في C

حيث : $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$

C : مركز النقطتين O_1, O_2 (النقطة التي تقسم O_1O_2 داخلاً أو خارجاً)





نصل بين البدايات وبين النهايات فتكون C نقطة التقائهما

ويمكن تعيين النقطة C تحليلياً من العلاقة :

$$\frac{\vec{O_1C}}{\vec{O_2C}} = -\frac{\omega_2}{\omega_1}$$

نظري هام

3 الحالة الثالثة : $\vec{\omega}_1 \parallel \vec{\omega}_2$ و $\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \vec{0}$

(متعاكسان مباشرة) في نقطتين مختلفتين

هام نظري

عندئذ يكون : $\vec{\omega}_1 = -\vec{\omega}_2$

$$\Rightarrow \vec{V}_a(M) = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{O_1M} + \vec{\omega}_2 \wedge \vec{O_2M}$$

$$= -\vec{\omega}_2 \wedge \vec{O_1M} + \vec{\omega}_2 \wedge \vec{O_2M}$$

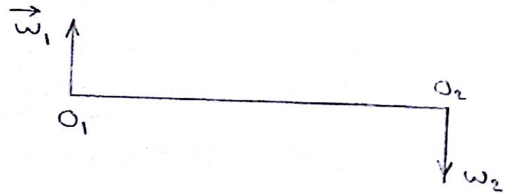
$$= \vec{\omega}_2 \wedge (-\vec{O_1M} + \vec{O_2M})$$

$$= \vec{\omega}_2 \wedge (\vec{O_2M} - \vec{O_1M})$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}_a(M) = \vec{\omega}_2 \wedge \vec{O_2O_1}}$$

أو نعطي السرعة المطلقة بالعلاقة :

$$\boxed{\vec{V}_a(M) = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{O_1O_2}}$$



فالحركة المحصلة هي حركة انسحابية ومنحى الانسحاب يعامد مستوي الدورانين

---

4 الحالة الرابعة : $\vec{\omega}_1 \parallel \vec{\omega}_2$ و $\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \vec{0}$

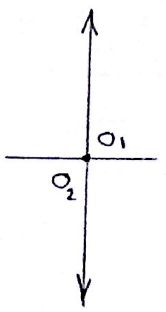
و $O_1 = O_2$

$$\vec{V}_a(M) = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{O_1M} + \vec{\omega}_2 \wedge \vec{O_2M}$$

لأن $\vec{\omega}_1 = -\vec{\omega}_2$ و $O_1 = O_2$

$$\Rightarrow \vec{V}_a(M) = -\vec{\omega}_2 \wedge \vec{O_2M} + \vec{\omega}_2 \wedge \vec{O_2M}$$

$$= \vec{0}$$



فالحركة المحصلة حالة سكون.