" يتم $f\circ g=0 \Rightarrow Img \subseteq \ker f$ "

١٧ / ١٢ / ٢٠١٤

« المحاضرة الحادية والعشرون »

٧-٢-٤- مبرهنة :

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "u"'] \arrow[d, "h"] & \\ A \arrow[r, "g"] & B \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

- إذا كانت P مودولا إسقاطيا، وكان المخطط (جانبه) مخططا من التشاكلات المودولية سطره متتالية تامة، وفيه: « $f\circ h = 0$ »، فإنه: يوجد تشاكل مودولي $u: P \to A$ بحيث يحقق: < $g\circ h = u$ >

- الإثبات :

- بما أن: $f\circ h = 0$، فإنه لأجل كل عنصر $p \in P$ يكون: $f\circ h(p) = 0$ ومنه: $f(h(p)) = 0$. مما يعني أن: $h(p) \in \ker f$ ① وبما أن سطر المخطط يدرس متتالية تامة فإن: $\ker f = Img$ ②، وبالتالي:

① and ② $(h(p) \in \ker f \Rightarrow Im\, h \subseteq \ker f)$ then $(Im\, h \subseteq Img)$

« أي نستفيد بشكل مباشر من النتيجة في الأعلى »

- هنا يمكننا من صياغة المخطط التالي:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "h^+"] & \\ A \arrow[r, "g^+"] & Img \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

- الذي سطره متتالية تامة، حيث أن: $h^+: P \to Img$: $h^+(p) = h(p)$

- وأن: $g^+: A \to Img$: $g^+(a) = g(a)$

- وبما أن P مودول إسقاطي، فإنه يوجد تشاكل مودولي $u: P \to A$ يحقق أن: « $g^+\circ u = h^+$ »، عندئذ لأجل $x \in P$ فإن:

$$g\circ u(x) = g(u(x)) = g^+(u(x)) = h^+(x) = h(x)$$

- وبالتالي نكون قد حصلنا على التشاكل u والذي يحقق: $g\circ u = h$ #

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dashed, "h"'] & \\ B \arrow[r, "f"] & A \arrow[r, "\pi"] & A/Imf \end{tikzcd}$$

/ /

⟸ وظيفة مستقلة

٧-٢-٥- مبرهنة :

- إذا كان $f: B \to A$ ، $g: C \to A$ تشاكلين مودوليين ، بحيث C مودول إسقاطي ، وكان $Img \subseteq Imf$ عندئذ فإنه يوجد تشاكل مودولي $h: C \to B$ بحيث أن: $(f \circ h = g)$.

- الإثبات :

- لنأخذ المخطط التالي :

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dashed, "h"'] & \\ B \arrow[r, "f"] & A \arrow[r, "\pi"] & A/Imf \end{tikzcd}$$

C إسقاطي

(تام)

نعلم أن سطره متتالية تامة ، عندئذ :

$(\pi \circ g = 0)$ لأن : $Img \subseteq Imf = \ker\pi$ ⟸ $Img \subseteq \ker\pi$

وحسب (مبرهنة ٧-٢-٤) فإنه يوجد تشاكل مودولي :
$h: C \to B$ بحيث أن : $(f \circ h = g)$

#

#

٢١/١٢/٢٠١٤

« المحاضرة الثانية والعشرون »

٧-٢- المودولات الأنغمارية : Injective modules.

٧-٢-١- تعريف :

- ليكن M مودولاً على حلقة R، نقول عن المودول M إنه أنغماري إذا كان من أجل كل متتالية تامة من التشاكلات المودولية :

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A$$

يكون التشاكل : $f^*: Hom(A,M) \longrightarrow Hom(A',M)$ غامراً.

٧-٢-٢- مبرهنة :

- إذا كان I مودولاً على حلقة R، فإن I مودول أنغماري عندما فقط عندما يكون من أجل كل مخطط من التشاكلات المودولية :

$$\begin{tikzcd} & I & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[u, "g"] & B \arrow[ul, dashed, "h"'] \end{tikzcd} \quad \text{(تامة)}$$

يوجد تشاكل مودولي $h: B \to I$ يجعل المخطط تبادلياً.

- الإثبات :

١- لنفرض أولاً أن المودول I أنغماري، ولنأخذ المخطط :

$$\begin{tikzcd} & I & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[u, "g"] & B \end{tikzcd}$$

والبرهان على وجود تشاكل مودولي $h: B \to I$ يحقق : $(h \circ f = g)$. عندئذ :

ـ بما أن I أنغماري فإن التشاكل : $f^*: Hom(B,I) \to Hom(A,I)$ غامر

وبالتالي : أياً كان : $g \in Hom(A,I)$ فإنه يوجد تشاكل مودولي

$u \in Hom(B,I)$ بحيث يحقق : $f^*(u) = g$ وعليه نجد أن :

$(g \circ f = g)$ حسب تعريف التشاكل المستحث .

#

ـ وبالعكس ، لنفرض أنه من أجل أي مخطط :

$$\begin{tikzcd} & I & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "g"] \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

(تام)

يوجد تشاكل مودولي $u: B \to I$ يجعل المخطط .

ولنبرهن على أن :

$f^*: Hom(B,I) \to Hom(A,I)$ غامر ، فيكون (تعريفاً) I أنغماري .

عندئذ :

مهما يكن : $g \in Hom(A,I)$ فإنه (حسب الفرض) يوجد تشاكل مودولي

$u: P \to I$ أي : $u \in Hom(B,I)$ بحيث يحقق : $g = u \circ f$

وهذا يعني أن : $f^*(u) = g$ وهذا يبين لنا أن f^* تشاكل غامر

وبالتالي I مودول أنغماري .

#

تمرينات محلولة

التمرين الأول :

لتكن $(M_i)_{1\le i\le n}$ أسرة موديولات جزئية من موديول M على حلقة R وليكن $M=\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$. برهن أن الصيغتين التاليتين متكافئتان :

(1) - الموديول M إسقاطي .

(2) - الموديول M_i إسقاطي ($\forall i=1,2,\dots,n$) .

الحل

(2) ⇐ (1) : لنفرض أن الموديول $M=\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ إسقاطي . لنأخذ مخطط التشاكلات الموديولية :

$$\begin{tikzcd} & M_i \arrow[d, "f_i"] & \\ A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r] & O \end{tikzcd}$$

(تامة)

وذلك أياً كان $i=1,2,\dots,n$ ولنبرهن على وجود تشاكلات موديولية

$v_i : M_i \longrightarrow A$ ($i=1,2,\dots,n$)

من أجلها يكون :

$g\circ v_i = f_i$ ($\forall i=1,2,\dots,n$)

لننظر في المخطط :

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, shift left, "\Pr_i"] & \\ & M_i \arrow[u, shift left, "in_i"] \arrow[d, "f_i"] & \\ A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r] & O \end{tikzcd}$$

(تامة)

بما أن المودول M إسقاطي فيوجد تشاكل مودولي $v:M\longrightarrow A$ مــن أجلــه يكون :

$$(g o v) o in_i = (f_i o \Pr_i) o in_i \qquad \forall i=1,2,\dots,n$$

وبملاحظة أن

$$\Pr_i o in_i = I_{M_i} \qquad \forall i=1,2,\dots,n$$

نجد أن :

$$g o(v o in_i) = f_i \qquad \forall i=1,2,\dots,n$$

وبالتالي يوجد تشاكل مودولي

$$v_i = v o in_i : M_i \longrightarrow A \qquad i=1,2,\dots,n$$

من أجله يكون

$$g \circ v_i = f_i \qquad \forall i=1,2,\dots,n$$

وهذا يثبت أن المودول M_i إسقاطي ($\forall i=1,2,\dots,n$) .

$(2) \Rightarrow (1)$: لنفرض أن المودول M_i ($i=1,2,\dots,n$) إسقاطي ، ولنأخذ مخطط التشاكلات المودولي :

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[d, "f"] & \\
(\text{تامة})\ A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r] & O
\end{tikzcd}$$

ولنبرهن على وجود تشاكل مودولي $v: M \longrightarrow A$ من أجله يكون $g \circ v = f$ ، لنتأمل المخطط

$$\begin{tikzcd}
 & M_i \arrow[d, "in_i"] & \\
 & M \arrow[d, "f"] & \\
(\text{تامة})\ A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r] & O
\end{tikzcd}$$

ويكون المودول $(i=1,2,\dots,n)$ M_i إسقاطي فيوجد تشاكل

$$v_i : M_i \longrightarrow A \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

من أجله يكون

$$g \circ v_i = f_i \circ in_i \qquad (\forall i=1,2,\dots,n)$$

لنعرف التطبيق :

$$v : M \longrightarrow A$$

$$v(\sum_{i=1}^{n} m_i) = \sum_{i=1}^{n} v_i(m_i)$$

فنجد أن v تشاكل مودولي كما أن $g \circ v = f$ لأنه أياً كان $m=\sum_{i=1}^{n} m_i \in M$ فإن

$$f(m) = f(\sum_{i=1}^{n} m_i) = \sum_{i=1}^{n} f(m_i) = \sum_{i=1}^{n} f(in_i(m_i))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} g(v_i(m_i)) = g(\sum_{i=1}^{n} v_i(m_i)) = g(v(m))$$

$$= (g \circ v)(m) \ .$$

وهذا يثبت أن المودول M إسقاطي .

<u>**التمرين الثاني**</u> :

لتكن $(M_i)_{i=1,2,\dots,n}$ أسرة مودولات جزئية من مودول M على حلقة R وليكن $M=\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} M_i$. برهن أن القضيتين التاليتين متكافئتان :

(1) – المودول M أفقي .

(2) – المودول M_i أفقي $(\forall i=1,2,\dots,n)$.

الحل

$(2) \Leftarrow (1)$: لنفرض أن المودول $M=\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} M_i$ أفقي . لنأخذ مخطط التشاكلات المودولية

$$\begin{tikzcd}
 & M_i & \\
\text{(تامة)}\ O \arrow[r] & A \arrow[u, "f_i"] \arrow[r, "g"] & B
\end{tikzcd}$$

وذلك أياً كان $i=1,2,....,n$ ولنبرهن على وجود تشاكلات مودولية

$$v_i : B \longrightarrow M_i \qquad (i=1,2,....,n)$$

من أجلها يكون :

$$v_i o g = f_i \qquad (\forall i=1,2,...n)$$

لننظر في المخطط :

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[d, shift right, "Pr_i"'] & \\
 & M_i \arrow[u, shift right, "in_i"'] & \\
\text{(تامة)}\ O \arrow[r] & A \arrow[u, "f_i"] \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

بما أن المودول M أفقي فيوجد تشاكل مودولي $v: B \longrightarrow M$ من أجله يكون:

$$v \circ g = in_i \circ f_i \qquad \forall i=1,2,\dots,n$$

وبالتالي يكون

$$Pr_i \circ (v \circ g) = Pr_i \circ (in_i \circ f_i) \qquad \forall i=1,2,\dots,n$$

ومنه نجد أن :

$$(Pr_i \circ v) \circ g = f_i \qquad \forall i=1,2,\dots,n$$

وبالتالي يوجد تشاكل مودولي

$$v_i = Pr_i \circ v : B \longrightarrow M_i \qquad i=1,2,\dots,n$$

من أجله يكون

$$v_i \circ g = f_i \qquad \forall i=1,2,\dots,n$$

وهذا يثبت أن المودول M_i أفقي ($\forall i=1,2,\dots,n$) .

$(2) \Rightarrow (1)$: لنفرض أن المودول ($i=1,2,\dots,n$) M_i أفقي ، ولنأخذ مخطط التشاكلات المودولي :

$$\begin{tikzcd}
 & M & \\
\text{(تامة)}\ O \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

ولنبرهن على وجود تشاكل مودولي $v: B \longrightarrow M$ من أجله يكون $v \circ g = f$ ، لنتأمل المخطط

$$
\begin{tikzcd}
 & M & \\
 & M_i \arrow[u, "in_i"] & \\
O \arrow[r] & A \arrow[u, "f_i"] \arrow[r, "g"] & B
\end{tikzcd}
$$

وكون المودول M_i $(i=1,2,\ldots,n)$ أفقي فيوجد تشاكل

$$v_i : B \longrightarrow M_i \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

من أجله يكون

$$v_i \circ g = f_i \qquad (\forall i=1,2,\ldots n)$$

وبالتالي

$$in_i \circ (v_i \circ g) = in_i \circ f_i \qquad (\forall i=1,2,\ldots,n)$$

ومنه يكون

$$(in_i \circ v_i) \circ g = f_i \qquad (\forall i=1,2,\ldots,n)$$

وبالتالي يوجد تشاكل مودولي $v = in_i \circ v_i : B \longrightarrow M$ من أجله يكون $v \circ g = f$.

وهذا يثبت أن المودول M أفقي .