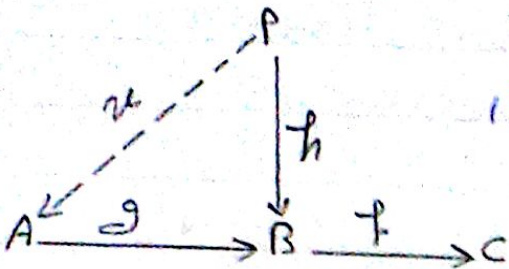


$\text{Im } g \subseteq \ker f \Rightarrow f \circ g = 0$

11 / 10 / 1992

« المراجعة الحادية والعشرون »

4-5-6 - مبرهنات :

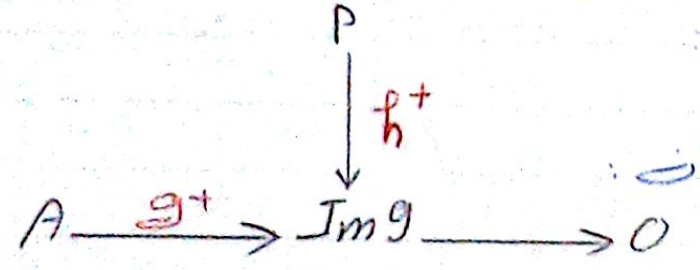


إذا كانت  $P$  مودولاً إسقاطياً، وكانت  $f$  (جانباً) تحللاً من التشاكلات المودولية سطحه متقابلين تامين، ومبنيه : «  $f \circ h = 0$  »، فإنه :  
 يوجد تشاكل مودولي  $u: P \rightarrow A$  بحيث يثبت :  
 $\langle g \circ h = u \rangle$

الاثبات :

بما أن  $f \circ h = 0$ ، فإنه لا بد أن  $f(h(P)) = 0$ ، وبما أن  $f$  تامين، فإن  $h(P) \in \ker f$ .  
 وبما أن  $h(P) \in \ker f = \text{Im } g$ ، فإن  $h(P) = g(a)$  لبعض  $a \in A$ .  
 وبما أن  $h(P) \in \ker f \Rightarrow \text{Im } h \subseteq \ker f$ ، فإن  $\text{Im } h \subseteq \text{Im } g$ .

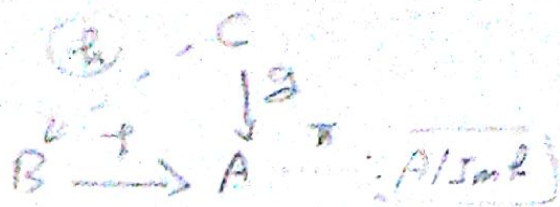
لا توجد مشكلة في الأجزاء السابقة، ولذا يمكننا من بناء التحليل التالي :



والذي سطحه متقابلين تامين، حيث أن :  
 $h^+: P \rightarrow \text{Im } g$   
 $h^+(p) = h(p)$

وأيضاً :  
 $g^+: A \rightarrow \text{Im } g$   
 $g^+(a) = g(a)$

وبما أن  $P$  مودول إسقاطي، فإنه يوجد تشاكل مودولي  $u: P \rightarrow A$  بحيث يثبت :  
 $\langle g^+ \circ u = h^+ \rangle$ ، حيث أن  $u(x) = v$  لبعض  $x \in P$ .  
 وبما أن  $g^+(u(x)) = g(u(x)) = g(g^{-1}(g(u(x)))) = g(u(x)) = h^+(x) = h(x)$   
 فإن  $g \circ u = h$ ، وبما أن  $u$  تشاكل مودولي، فإنه يثبت :  
 $\langle g \circ u = h \rangle$

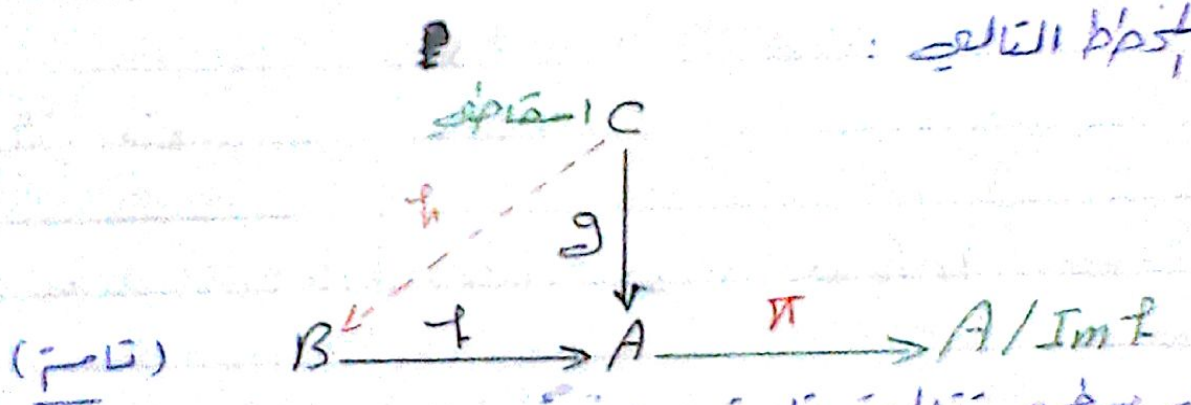


البيان الثاني  $\Rightarrow$  البيان 1 - صحيح

إذا كان  $f: B \rightarrow A$  و  $g: C \rightarrow A$  تناكلا موجودا، حيث  $C$  موجودا إسقاطا، فإن  $Im g \subseteq Im f = ker \pi$ ، فإنه يوجد تناك موجود  $h: C \rightarrow B$  بحيث  $(f \circ h = g)$ .

البيانات:

لنا  $\pi \circ g = 0$  التالي:



فإن  $Im g \subseteq ker \pi = Im f = ker \pi$ ، حيث  $(\pi \circ g = 0)$ .  
 ومن (البيان 1 - صحيح) فإنه يوجد تناك موجود  $h: C \rightarrow B$  بحيث  $(f \circ h = g)$ .

#

#

### « المحاضرة الثانية والعشرون »

١-٢-٤. المودولات الانقضية . injective modules .

١-٢-٤. تعريف:

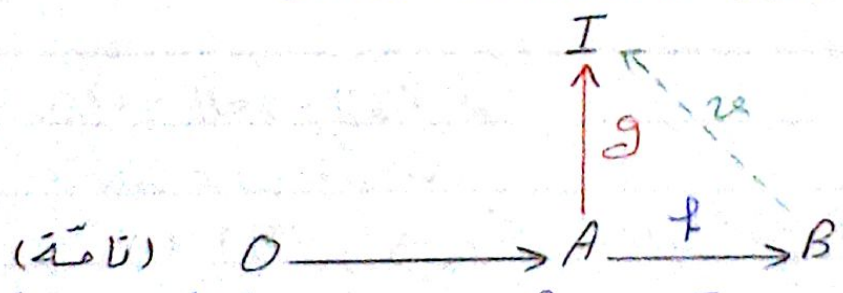
- ليكن  $M$  مودولاً على حلقة  $R$ ، نقول عن المودول  $M$  انه **انقضي** إذا كانت  
من أجله كل متتالية تامة من التشاكلات المودولية:

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A$$

يكون التشاكل  $f^* : \text{Hom}(A, M) \longrightarrow \text{Hom}(A', M)$  عامراً .

١-٢-٤. مبرهنة:

- إذا كانت  $I$  مودولاً على حلقة  $R$ ، فإن  $I$  مودول **انقضي** عندما ونقط عندما  
يكون من أجله كل محظ من التشاكلات المودولية:

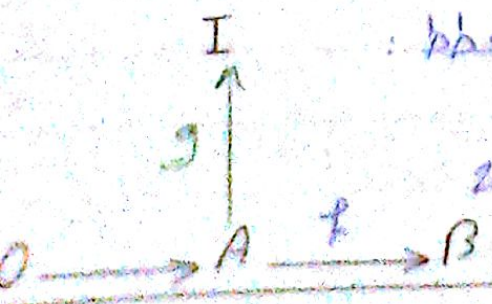


يوجد تشاكل مودولي  $\alpha: B \rightarrow I$  يجعل المخطط متبادلياً .

- الإثبات:

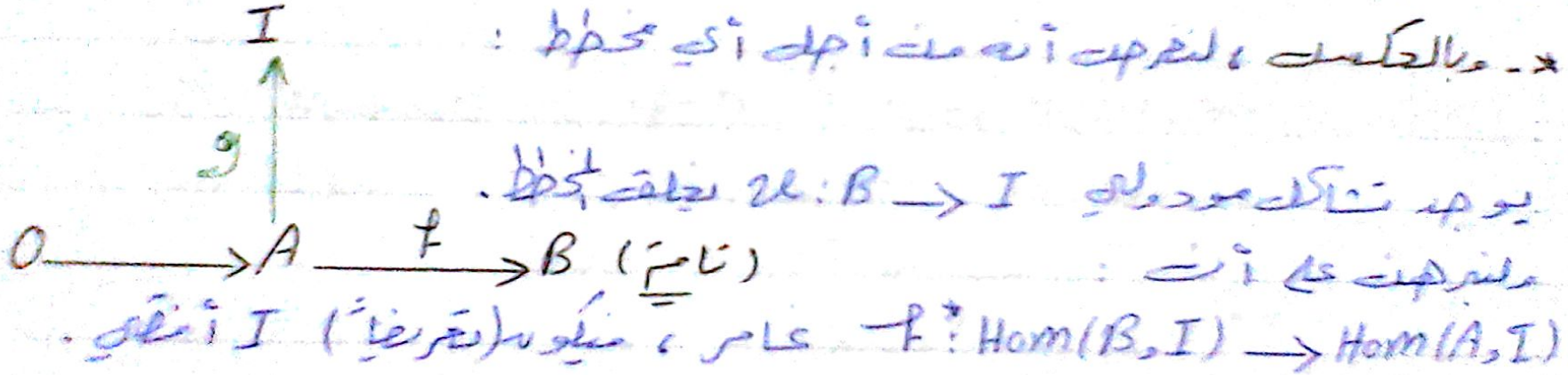
١. لنفرض أولاً أنه المودول  $I$  انقضي، ولناخذ  $\alpha: B \rightarrow I$

والمودول  $I$  موجود تشاكل مودولي  $\alpha: B \rightarrow I$  يحقق  $(\alpha \circ f = g)$  عندئذ:



بما أن  $I$  أنقى من التناك :  $f^* : \text{Hom}(B, I) \rightarrow \text{Hom}(A, I)$  عامر  
 وبالتالي : أيًا كانت :  $g \in \text{Hom}(A, I)$  فإنه يوجد تناك موجود  
 $u \in \text{Hom}(B, I)$  بحيث  $f^*(u) = g$  . وعليه، هي أن  
 (  $g \circ f = g$  ) من تعريف التناك  $f$  .

#



عندئذ :  
 مما كنت :  $g \in \text{Hom}(A, I)$  فإنه (  $f^*$  العرصة ) يوجد تناك موجود  
 $u : B \rightarrow I$  :  $f^*(u) = g$  .  
 مما يعني أن :  $f^*(u) = g$  مما يعني لنا أن  $f^*$  تناك عامر  
 وبالتالي  $I$  موجود أنقى .

#

## تحويلات محلوقة

التمرين الأول :

لكي  $(M_1)_{i=1, \dots, n}$  أسرة مودولات جزئية من مودول  $M$  على حقل  $R$

وليك  $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$  . برهن أن القضيبين التاليين متكافئان :

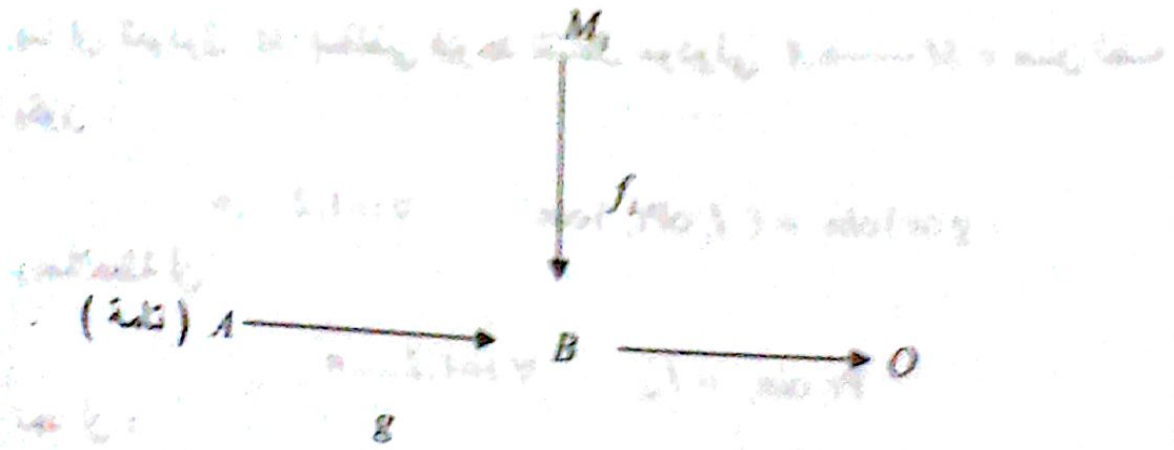
(1) - المودول  $M$  إسقاطي .

(2) - المودول  $M_i$  إسقاطي  $(\forall i=1, 2, \dots, n)$  .

الحل

(1)  $\Rightarrow$  (2) : نفرض أن المودول  $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$  إسقاطي . لتأخذ منفض

تشكلات المودولية :



وذلك لأي كان  $i=1, 2, \dots, n$  ولنبرهن على وجود تشكلات مودولية

$$v_i: M_i \rightarrow A$$

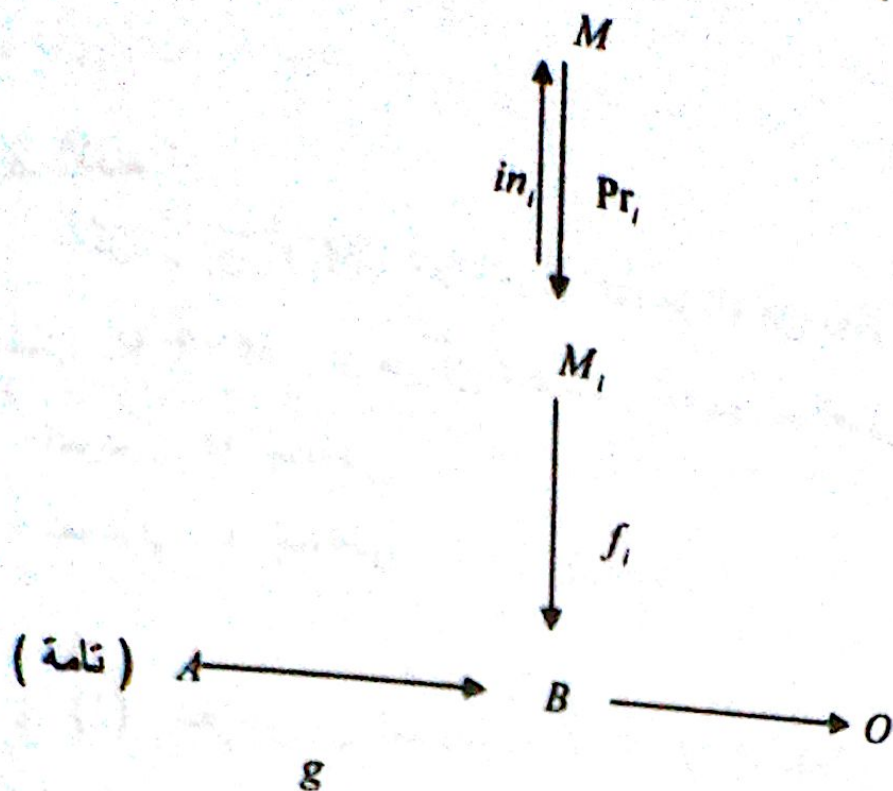
$$(i=1, 2, \dots, n)$$

من أجلها يكون :

$$g \circ v_i = f_i$$

$$(\forall i=1, 2, \dots, n)$$

لننظر في المخطط :



بما أن المودول  $M$  إسقاطي فيوجد تشاكل مودولي  $v: M \rightarrow A$  من أجله يكون :

$$(g \circ v) \circ \text{in}_i = (f_i \circ \text{Pr}_i) \circ \text{in}_i \quad \forall i=1,2,\dots,n$$

وبملاحظة أن

$$\text{Pr}_i \circ \text{in}_i = I_{M_i} \quad \forall i=1,2,\dots,n$$

نجد أن :

$$g \circ (v \circ \text{in}_i) = f_i \quad \forall i=1,2,\dots,n$$

وبالتالي يوجد تشاكل مودولي

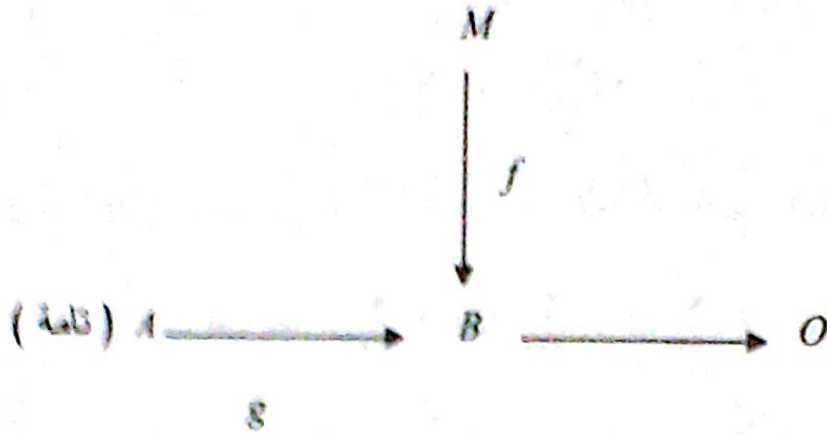
$$v_i = v \circ \text{in}_i : M_i \rightarrow A \quad i=1,2,\dots,n$$

من أجله يكون

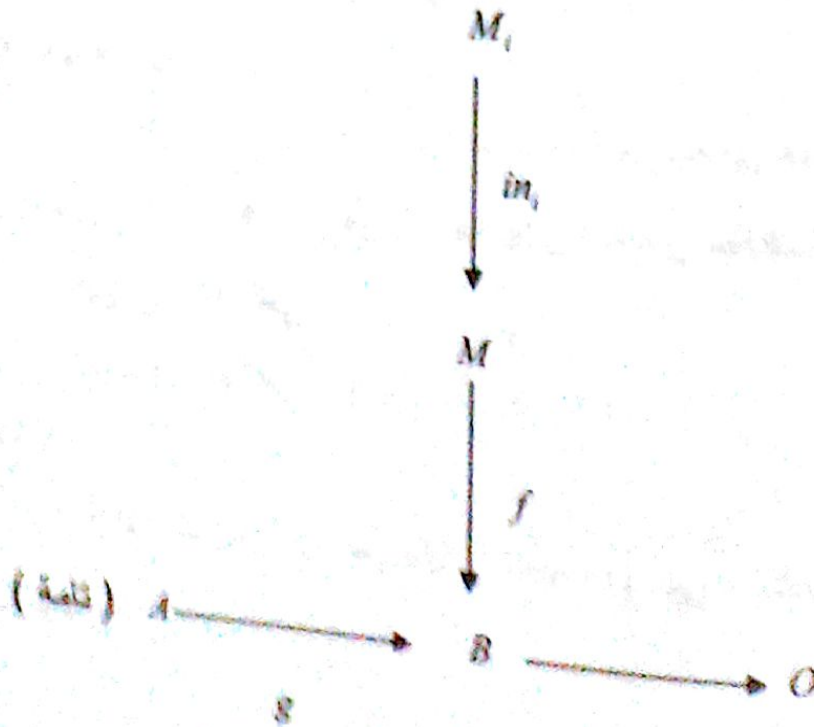
$$gov_i = f_i$$

$$\forall i=1,2,\dots,n$$

وهذا يثبت أن المودول  $M_i$  إسقاطي  $(\forall i=1,2,\dots,n)$ .  
 (1)  $\Rightarrow$  (2) : لنفرض أن المودول  $M_i (i=1,2,\dots,n)$  إسقاطي ، ولناخذ  
 مخطط التشاكلات المودولي :



ولنبرهن على وجود تشاكل مودولي  $v: M \rightarrow A$  من أجله يكون  $gov = f$ .  
 لتأمل المخطط



وكون المودول  $M_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) إسقاطي فيوجد تشاكل

$$v_i: M_i \longrightarrow A \quad (i=1,2,\dots,n)$$

من أجله يكون

$$g \circ v_i = f_i \circ in_i \quad (\forall i=1,2,\dots,n)$$

لنعرف التطبيق :

$$v: M \longrightarrow A$$

$$v\left(\sum_{i=1}^n m_i\right) = \sum_{i=1}^n v_i(m_i)$$

ف نجد أن  $v$  تشاكل مودولي كما أن  $g \circ v = f$  لأنه أيًا كان  $m = \sum_{i=1}^n m_i \in M$  فإن

$$\begin{aligned} f(m) &= f\left(\sum_{i=1}^n m_i\right) = \sum_{i=1}^n f(m_i) = \sum_{i=1}^n f(in_i(m_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n g(v_i(m_i)) = g\left(\sum_{i=1}^n v_i(m_i)\right) = g(v(m)) \\ &= (g \circ v)(m) . \end{aligned}$$

وهذا يثبت أن المودول  $M$  إسقاطي .

التعريف الثاني :

لتكن أسرة مودولات جزئية من مودول  $M$  على حقة

$R$  وليكن  $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$  . برهن أن القضييتين التاليتين متكافئتان :

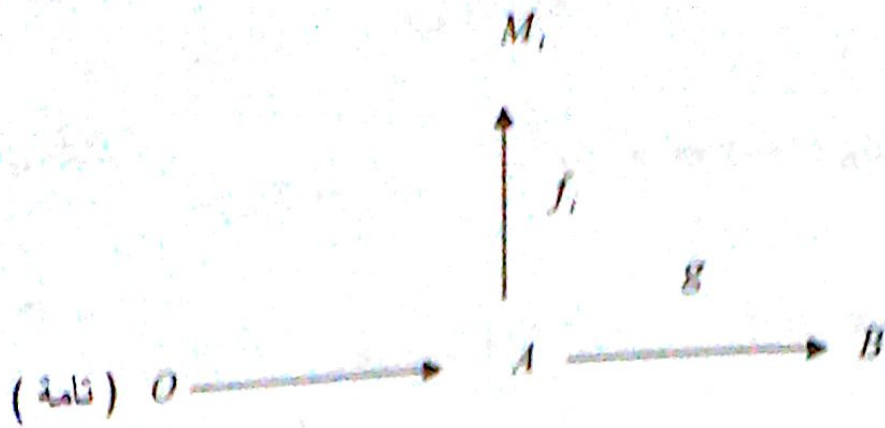
(1) - المودول  $M$  أفقي .

(2) - المودول  $M_i$  أفقي ( $\forall i=1,2,\dots,n$ ) .

الحل

(2)  $\Rightarrow$  (1) : لنفرض أن المودول  $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$  أفقي . لناخذ مخطط التشاكل

المودولية



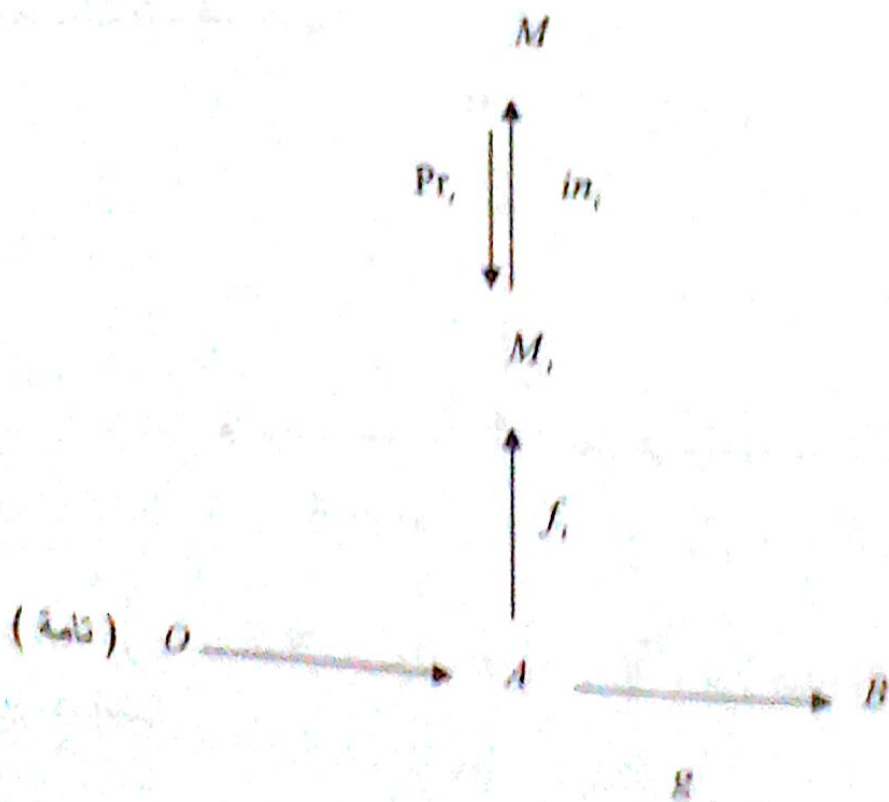
وذلك أيًا كان  $l=1,2,\dots,n$  ولنبرهن على وجود تشاكلات مودولية

$$v_l: B \longrightarrow M_l \quad (l=1,2,\dots,n)$$

من أجلها يكون :

$$v_l \circ g = f_l \quad (\forall l=1,2,\dots,n)$$

لننظر في المخطط :



بما أن المودول  $M$  أفقي فيوجد تشاكل مودولي  $v: B \rightarrow M$  من أجله يكون

$$v \circ g = in_i \circ f_i \quad \forall i=1,2,\dots,n$$

وبالتالي يكون

$$Pr_i \circ (v \circ g) = Pr_i \circ (in_i \circ f_i) \quad \forall i=1,2,\dots,n$$

ومنه نجد أن :

$$(Pr_i \circ v) \circ g = f_i \quad \forall i=1,2,\dots,n$$

وبالتالي يوجد تشاكل مودولي

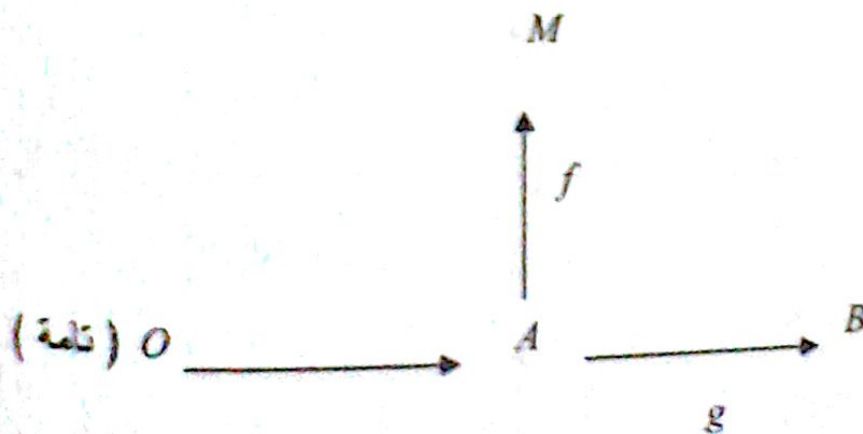
$$v_i = Pr_i \circ v : B \rightarrow M_i \quad i=1,2,\dots,n$$

من أجله يكون

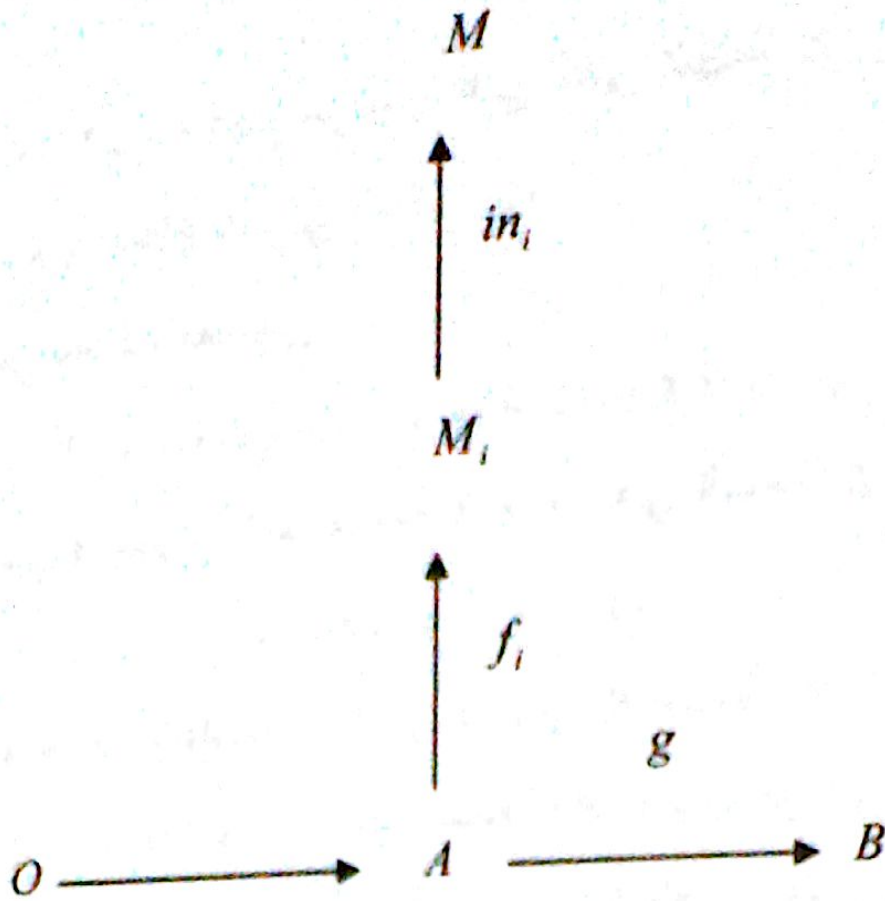
$$v_i \circ g = f_i \quad \forall i=1,2,\dots,n$$

وهذا يثبت أن المودول  $M_i$  أفقي  $(\forall i=1,2,\dots,n)$ .

(1)  $\Rightarrow$  (2) : لنفرض أن المودول  $M_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) أفقي ، ولناخذ مخطط التشاكلات المودولي :



ولنبرهن على وجود تشاكل مودولي  $v: B \rightarrow M$  من أجله يكون  $v \circ g = f$  لتتأمل المخطط



وكون المودول  $M_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) أفقي فيوجد تشاكل

$$v_i: B \longrightarrow M_i \quad (i=1,2,\dots,n)$$

من أجله يكون

$$v_i \circ g = f_i \quad (\forall i=1,2,\dots,n)$$

وبالتالي

$$in_i \circ (v_i \circ g) = in_i \circ f_i \quad (\forall i=1,2,\dots,n)$$

ومنه يكون

$$(in_i \circ v_i) \circ g = f_i \quad (\forall i=1,2,\dots,n)$$

وبالتالي يوجد تشاكل مودولي  $v = in_i \circ v_i: B \longrightarrow M$  من أجله يكون  $v \circ g = f$ .

وهذا يثبت أن المودول  $M$  أفقي.

□