المحاضرة السابعة.. "عملي"

الخميس 2015/4/23

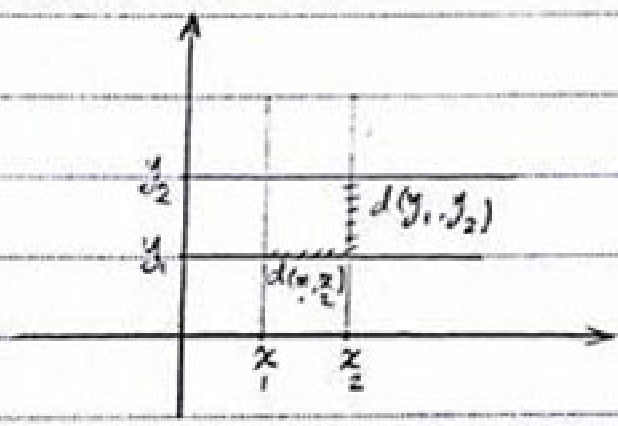
الجواب:

س: إذا كان لدينا (X_1, d_1) و (X_2, d_2) فضاءين متريين. كيف أعرف الفضاء المتري الجداء..

$$X = X_1 \times X_2$$

$$x = (x_1, y_1) \quad , \quad y = (y_1, y_2)$$

$$d(x,y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$ وهي تشكل مسافة



$$d'(x,y) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$$

$$d''(x,y) = \sqrt{(d_1(x_1,y_1))^2 + (d_2(x_2,y_2))^2}$$ المسافة الإقليدية

تذكرة:

إذا كان لدينا الفضاءين التبولوجيين (X_1, τ_1) و (X_2, τ_2) فإن تبولوجيا الجداء تعرف كالتالي:

$$X = X_1 \times X_2$$

$$B = \{A_1 \times A_2 : A_1 \in \tau_1 , A_2 \in \tau_2\}$$ (قاعدة لتبولوجيا)

صف المستطيلات المفتوحة

فإن: $A \in \tau \Leftrightarrow A =$ اجتماع كيفي لمستطيلات مفتوحة.

تبولوجيا الجداء

وإن تبولوجيا الجداء هي أصغر تبولوجيا تجعل توابع الإسقاط $X \xrightarrow{P} X_j$ مستمرة.

$$x = (x_1, x_2) \longmapsto x_j \quad ; j = 1,2$$

وبالتالي سننتقل إلى الفضاءات القيوسة.
إذا كان لدينا (X_1, S_1) و (X_2, S_2) فضاءين قيوسين.

سنأخذ $X = X_1 \times X_2$
نشكل صف المستطيلات القيوسة

$$R = \{A_1 \times A_2 : A_1 \in S_1 , A_2 \in S_2\}$$

$$\mathcal{A} = \{E = (A_1 \times B_1) \cup \dots \cup (A_n \times B_n)\}$$ صف المجموعات الابتدائية

$$\sigma(\mathcal{A}) = S_1 \otimes S_2$$ أصغر جبر تام يحوي صف المستطيلات

إذا زودنا X بالجبر التام الجداء فإنه يجعل توابع الاسقاط قيوسة وهو أصغر جبر تام يحقق هذه الخاصة.

حل التمرين الموجود في المحاضرة السابقة: ١١٢/١

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad if\ (x,y) \neq (0,0)$$

$$f(0,0) = 0$$

$$\varphi(x,y) = \frac{x}{(x^2+y^2)}$$

$$\varphi'_x(x,y) = \frac{(1)(x^2+y^2) - (2x)(x)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\varphi'_x(x,y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

إذن:

$$\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx = \int_0^1 -\left(\frac{x}{(x^2+y^2)^2}\right)_x' dx$$

$$= \left[\frac{-x}{(x^2+y^2)^2}\right]_0^1 = \frac{-1}{1+y^2}$$

$$\int_0^1 \frac{-1}{1+y^2}\,dy = \left[-\arctan y\right]_0^1 = -\left[\frac{\pi}{4} - 0\right] = -\frac{\pi}{4}$$

ونجد أنّ:

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy\,dx = \frac{\pi}{4}$$

انتهت المحاضرة السابعة

"علي"