المحاضرة العشرون

مفهوم القياس الخارجي :

$X \neq \emptyset$ ، $\mathcal{A}$ جبر σ على X ولتكن دالة القياس $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$

$$\forall A \subseteq X , \exists E_i \in \mathcal{A} : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

وأن

$$\mu^*(A) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) : E_i \in \mathcal{A}$$

بحيث

$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow \mu^*(A) = \mu(A)$$

تعريف القياس الخارجي :

$X \neq \emptyset$ ، $P(X)$ مجموعة أجزاء X

نقول عن التابع μ^* إنه قياس خارجي على X بحيث $\mu^* : P(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$
إذا تحققت الشروط :

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$
2. $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
3. $\forall A_i \in P(X),\ i \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$

ملاحظة : كل قياس هو قياس خارجي إلا أن العكس ليس بالضرورة صحيح ، والمثال القادم يوضح ذلك .

مثال : ليكن التابع $\mu^* : P(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ معرفاً كما يلي :

$$\mu^*(A) = \sqrt{|A|}$$

حيث $|A|$ عدد عناصر A ، والمطلوب :

/ /

1- بين ان التابع μ^* يمثل قياساً خارجياً على X .
2- وضح ان μ^* لا يمثل قياساً على X .

الحل :

1

① $\mu^*(\emptyset) = 0$

$$\mu^*(\emptyset) = \sqrt{|\emptyset|} = \sqrt{0} = 0$$

② $A \subseteq B \Rightarrow |A| \leq |B|$

$$\mu^*(A) = \sqrt{|A|} \leq \sqrt{|B|} = \mu^*(B) \Rightarrow \mu^*(A) = \mu^*(B)$$

③ $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n \cup \ldots$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right| \leq |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| + \ldots$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots| \leq |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| + \ldots$$

$$\sqrt{\left|\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right|} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |A_i|}$$

$$\Rightarrow \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sqrt{\left|\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right|} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{|A_i|} = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

ومنه μ^* يمثل قياساً خارجياً على X .

2

لكن لدينا

$$|A| = |\{1, 2, \ldots, 16\}| = 16$$
$$|B| = |\{17, 18, \ldots, 25\}| = 9$$

نلاحظ ان :

$$A \cap B = \emptyset$$

وان :

$$\mu^*(A \cup B) = \sqrt{|A \cup B|} = 5 \quad \wedge \quad \mu^*(A) = \sqrt{|A|} = 4$$

$$\mu^*(B) = \sqrt{|B|} = 3 \Rightarrow \mu^*(A \cup B) \neq \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

ومنه μ^* لا يمثل قياس وإنما يمثل قياس خارجي .

المجموعة القيوسة :

1 المجموعة القيوسة في فضاء قياس :

لتكن $(X, P(X), \mu)$ فضاء قياس نقول عن $A \in P(X)$ انها قيوسة بالنسبة للقياس μ اذا تحقق :

$$\forall E \subseteq X : \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A^c)$$

وهذا محقق لأن

$$\mu(E) = \mu(E \cap X) = \mu(E \cap (A \cup A^c))$$

$$= \mu((E \cap A) \cup (E \cap A^c))$$

وبما أن $E \cap A$; $A^c \cap E$ منفصلتين مثنى مثنى فإن

$$\mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A^c)$$

ولما كانت A مجموعة اختيارية فإن جميع المجموعات في $P(X)$ قيوسة

2 - المجموعة القيوسة في فضاء قياس خارجي :

لتكن $X \neq \emptyset$ و $A \subseteq X$ نقول عن A مجموعة قيوسة بالنسبة μ^* (حيث μ^* دالة القياس الخارجي) اذا تحقق :

$$\forall E \subseteq X : \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

نتائج:

1 إن المتراجحة $\forall E \subseteq X : \mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ محققة دوماً فيمكن استبدال الشرط بالشرط الآتي :

$$\forall E \subseteq X : \mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

2- $X, \emptyset$ مجموعتان مقيوستان وضوحاً.

3. إذا كانت A مقيوسة فإن A^c مقيوسة.

ملاحظة 1: إذا كان μ^* قياس خارجي على X بالشكل:

$$\mu^* : P(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

فإنه يوجد قياس μ على جبر تام من أجزاء X وليكن A يحقق أن:

$$\mu^*|_A = \mu \quad ; \quad \mu : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

ومثال على ذلك نأخذ $A = \{\emptyset, X\}$ فإن $\mu^*|_A = \mu$ محققة دوماً.

ملاحظة 2: إذا أخذنا جميع المجموعات المقيوسة بالنسبة لـ μ^* ولنرمز لها بـ m^* عندئذٍ:

1. m^* تمثل جبر على أجزاء X.
2. m^* تمثل جبر تام على أجزاء X

فإن هذا محقق

$$\left.\begin{array}{l} \mu^* : P(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \\ \mu : m^* \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \end{array}\right\} \Rightarrow \mu^*|_{m^*} = \mu$$

انتهت المحاضرة...