المحاضرة السابعة عشرة..

الثلاثاء 2015/5/12 ..

مسائل صفحة ١٨٣ ..

٨- أثبت أنه في فضاء جداء داخلي، يكون الشرط اللازم والكافي كي يكون $x \perp y$ هو أن تتحقق المتباينة $\|x\| \leq \|x+\alpha y\|$ أياً كان العدد α.

<u>الحل</u>:

$\Leftarrow$) بفرض $x \perp y$

لنفرض جدلاً أنَّ $\exists \alpha ; \|x+\alpha y\| < \|x\|$

$$\|x+\alpha y\|^2 < \|x\|^2$$

$$\langle x+\alpha y, x+\alpha y\rangle < \|x\|^2$$

$$\|x\|^2 + \alpha\langle y,x\rangle + \bar{\alpha}\langle x,y\rangle + |\alpha|^2\|y\|^2 < \|x\|^2$$

$$\alpha \underbrace{\langle y,x\rangle}_{0} + \bar{\alpha}\underbrace{\langle x,y\rangle}_{0} + |\alpha|^2\|y\|^2 < 0$$

لأنَّ $x \perp y$

$\Rightarrow |\alpha|^2\|y\|^2 < 0$ وهذا مرفوض

وبالتالي القضية صحيحة أي: $\forall \alpha ; \|x+\alpha y\| \geq x$

$\Rightarrow$) لنفرض أنَّ $\forall \alpha \quad \|x+\alpha y\| \geq \|x\|$

$$\|x+\alpha y\|^2 = \|x\|^2 + \bar{\alpha}\langle x,y\rangle + \alpha\langle y,x\rangle + |\alpha|^2\|y\|^2 \geq \|x\|^2$$

$$\alpha\langle y,x\rangle + \bar{\alpha}\langle x,y\rangle + |\alpha|^2\|y\|^2 \geq 0$$

هذا الناتج محقق $\forall \alpha$

نختار α بالشكل: $\alpha = -\dfrac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}$

$$\Rightarrow -\frac{\langle x,y\rangle\langle y,x\rangle}{\|y\|^2} - \frac{\langle x,y\rangle\langle y,x\rangle}{\|y\|^2} + \left|-\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}\right|^2 \|y^2\| \geq 0$$

$$-\langle x,y\rangle\langle y,x\rangle - \langle x,y\rangle\langle y,x\rangle + |\langle x,y\rangle|^2 \geq 0$$

$$-2|\langle x,y\rangle|^2 + |\langle x,y\rangle|^2 \geq 0$$

$$0 \geq -|\langle x,y\rangle| \geq 0$$

$$\Rightarrow |\langle x,y\rangle| = 0 \Rightarrow \langle x,y\rangle = 0$$

$$\Rightarrow x \perp y$$

مسائل صفحة ١٩٤ ,,

١- ليكن H فضاء هلبرت و M مجموعة جزئية محدبة في H و (x_n) متتالية في M بحيث أنّ: $\|x_n\| \to d$

حيث $d = \inf\limits_{x \in M} \|x\|$ فبين أنّ (x_n) متقاربة في H.

الحل: لنثبت أنّ (x_n) كوشية:

لدينا حسب مساواة متوازي الأضلاع:

$$\|x_n + x_m\|^2 + \|x_n - x_m\|^2 = 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2$$

$$\Rightarrow \|x_n - x_m\|^2 = -\|x_n + x_m\|^2 + 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2$$

$$= 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - 4\left\|\frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2$$

بما أنّ المجموعة M محدبة و $x_n, x_m \in M$ فإنّ:

$$\frac{x_n + x_m}{2} \in M$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{x_n + x_m}{2} \right\| \geq d \Rightarrow \left\| \frac{x_n + x_m}{2} \right\|^2 \geq d^2$$

$$\Rightarrow -4 \left\| \frac{x_n + x_m}{2} \right\|^2 \leq -4d^2$$

$$\Rightarrow \|x_n - x_m\|^2 \leq -4d^2 + 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 \xrightarrow[n,m \to \infty]{} \underbrace{-4d^2 + 2d^2 + 2d^2}_{0}$$

ومنه المتتالية (x_n) كوشية في فضاء هلبرت وبالتالي (x_n) متقاربة في H.

انتهت المحاضرة..

أسأل الله تعالى أن أكون قد وفقت في نقل المحاضرات إليكم بدقة وأمانة ..

فاطمة الترشيد..