المحاضرة الحادية والعشرون والأخيرة

الخميس ٢١/٥/٢٠١٠م

تكامل لوبيغ

1 جبر بوريل :

إذا كان (X,τ) فضاء طبولوجي - فإن أصغر جبر تام يحتوي τ يسمى جبر بوريل التام ونرمز لذلك بـ $B(X,\tau)$.

- إذا كان (X,τ) الفضاء الطبولوجي المألوف على $\mathbb{R}$ فإن $B(X,\tau)$ جبر بوريل التام على $\mathbb{R}$

أي أنه أصغر جبر تام يحتوي على الطبولوجيا τ.

- نرمز لـ جبر بوريل $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ على $\mathbb{R}$ بحيث $A \in \mathcal{A}$ مجموعة بوريلية.

$$\tau = \{A : A \subseteq \mathbb{R} : \forall x \in A , \exists\, a,b \in \mathbb{R} : x \in \,]a,b[\, \subseteq A\}$$

2 القياس الخارجي على $\mathbb{R}$: $\mu^* : P(\mathbb{R}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) \;;\; A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}\,]a_n, b_n[\right\}$$

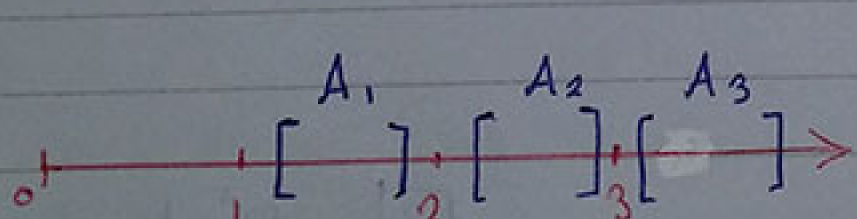
نلاحظ أن: $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i)$; $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$

مثال: احسب قياس المجموعة $A \subseteq \mathbb{R}$ حيث

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty}[n + 4^{-n}, n + 2^{-n}]$$

وضح ذلك برسم المجالات الجزئية حيث $n = 1,2,3$

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$



$$\begin{cases} A_1 = [1 + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{2}] \\ A_2 = [2 + \frac{1}{4^2}, 2 + \frac{1}{2^2}] \\ A_3 = [2 + \frac{1}{4^3}, 2 + \frac{1}{2^3}] \end{cases}$$

$$\mu(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[n+\frac{1}{2^n}-n-\frac{1}{4^2}\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^2}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

التوابع المقيسة : $(X, \mathcal{A}, \mu_1) \longrightarrow (X, \mathcal{B}, \mu_2)$

ليكن

$$f: X \longrightarrow Y$$

نقول عن f إنه تابع مقيس إذا كانت الصورة العكسية للمجموعة المقيسة هي مجموعة مقيسة ، اي

$\forall B \in \mathcal{B}$ مجموعة مقيسة $\Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ مجموعة مقيسة

مثال : التابع الدرجي المميز

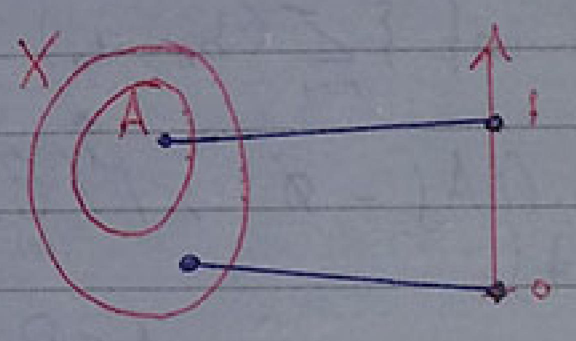
$$f: X \longrightarrow \mathbb{R}$$

إذا كان $X \neq \emptyset$ و $A \subseteq X$

$$\chi_A(x)=f_A(x)=\begin{cases}0 & ; x \notin A\\ 1 & ; x \in A\end{cases}$$

$$\mathcal{M}_A=\{\emptyset, X, A, A^c\}$$

توضيح :



وله الخواص التالية :

$\boxed{1}$ $\chi_X(x)=1$

$\boxed{2}$ $\chi_\emptyset(x)=0$

$\boxed{3}$ $\chi_{A\cap B}(x)=\chi_A(x)\cdot\chi_B(x)$

لنرهن $\boxed{3}$

$$\chi_{A\cap B}(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in A\cap B \\ 0 & ; x \notin A\cap B \end{cases}$$

جبرياً :

When $x \in A\cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B$

اي $\chi_A(x) = 1$ و $\chi_B(x) = 1 \Leftarrow \chi_A(x) \cdot \chi_B(x) = 1$

When $x \notin A\cap B \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in A \wedge x \notin B \\ x \notin A \wedge x \in B \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \chi_A(x) \cdot \chi_B(x) = 1.0 = 0.1 = 0$$

$\boxed{4}$ $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x)$
$A\cap B = \emptyset$

$\boxed{5}$ $A \subseteq B \Rightarrow \chi_A(x) \leq \chi_B(x)$

تذكرة :
$B = A \cup (B \setminus A)$.

$\boxed{6}$ $\chi_{A\setminus B}(x) = \chi_A(x) - \chi_{A\cap B}(x)$

$\boxed{7}$ - $\chi_{A\Delta B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - 2\chi_{A\cap B}(x)$

$\boxed{8}$ - $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x)$

$\boxed{٤}$ التوابع البسيطة :

تعريف : نقول عن تابع انه بسيط إذا كانت مجموعة قيمه منتهية

$$f : X \longrightarrow \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$$

مبرهنة : كل تابع بسيط يمكن كتابته كتركيب خطي لدوال واحدية بالشكل التالي

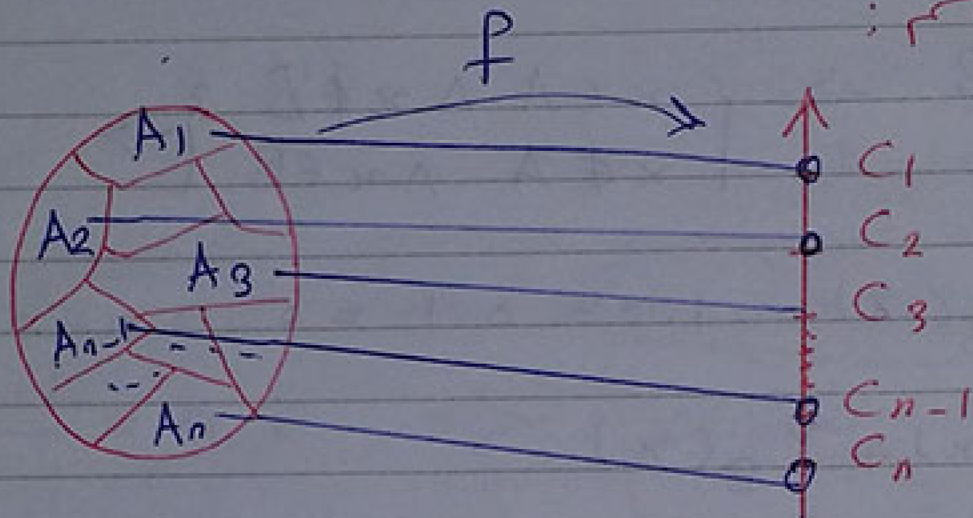
$$\forall x \in X : \quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \chi_{A_i}(x)$$

حيث c_i قيم التابع f و $A_i \longrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j$$

اي $f(x) = c_1 \chi_{A_1}(x) + c_2 \chi_{A_2}(x) + \dots + c_n \chi_{A_n}(x)$

توضيح عبر الرسم :



حيث $f^{-1}(\{c_1\}) = A_1 \quad , \quad f^{-1}(\{c_i\}) = A_i$

5 - تكامل لوبيغ للتوابع البسيطة :

إذا كان $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء قياس . نعرف تكامل لوبيغ للتابع البسيط f على X بالنسبة للقياس μ كما يلي :

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \mu(A_i)$$

حيث c_i قيم التابع f حيث $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$
و A_i المجموعات التي تحقق

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = X \quad \wedge \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad ; i \neq j$$

مثال :

$$I = \int_{[-3,3]} \operatorname{sign}(\cos \pi x) \, d\mu$$

حيث
$$\operatorname{sign} = \begin{cases} 1 & : w > 0 \\ 0 & : w = 0 \\ -1 & : w < 0 \end{cases}$$

الحل :

$I = c_1 \mu(A_1) + c_2 \mu(A_2) + c_3 \mu(A_3)$

$= \underbrace{1\, \mu(A_1)}_{A_1 > 0} + \underbrace{0\, \mu(A_2)}_{A_2 = 0} + \underbrace{(-1)\, \mu(A_3)}_{A_3 < 0}$

ولدينا $\cos \pi x$ لنوجد أصفاره

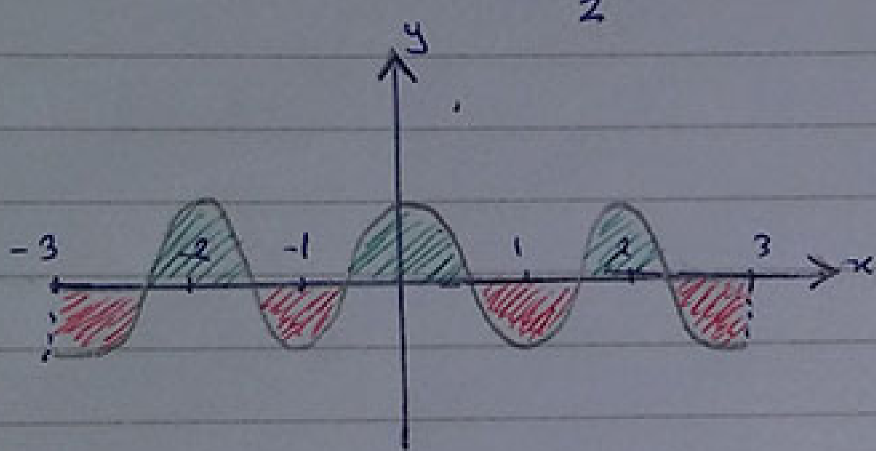
$\cos \pi x = 0 \Rightarrow \pi x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2} + k$

$k = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $k = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

$k = 1 \Rightarrow x = 1\frac{1}{2}$ $\qquad$ $k = -2 \Rightarrow x = -1\frac{1}{2}$

$k = 2 \Rightarrow x = 2\frac{1}{2}$ $\qquad$ $k = -3 \Rightarrow x = -2\frac{1}{2}$



لنوجد $\mu(A_3)$, $\mu(A_2)$, $\mu(A_1)$

$A_2 = \{ \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2} \}$

$\mu(A_2) = 0$

$A_1 =]-2\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}[\cup]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\cup]1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}[$

$\Rightarrow \mu(A_1) = 1 + 1 + 1 = 3$

$A_3 = [-3, -2\frac{1}{2}[\cup]-1\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}[\cup]2\frac{1}{2}, 3]$

$\Rightarrow \mu(A_3) = \frac{1}{2} + 1 + 1 + \frac{1}{2} = 3$

$\Rightarrow I = \int_{[-3,3]} f \, d\mu = 1(3) + 0(0) + (-1)(3) = 0$

والله ولي التوفيق

yousef - Alsammak

انتهت المحاضرة الأخيرة