المحاضرة العاشرة ..

الخميس 2015/4/23

مبرهنة:

قصة أي تابع قيوس تكون قيوسة .

أي إذا افترضنا أنَّ $\mathcal{S}$ جبر تام على X و τ جبر تام على Y و $\mathcal{S}\otimes\tau$ الجبر التام الجداء وأنَّ : $f : X\times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ تطبيق قيوس فإنَّ f_x, f_y تطبيقان قيوسان مهما تكن $x\in X$ ومهما تكن $y\in Y$.

الإثبات:

$$f : X\times Y \to \overline{\mathbb{R}}$$

بما أن f قيوس فإنَّ الصورة العكسية للمجموعة المفتوحة هي مجموعة قيوسة .

أي أنَّ :

$$E = f^{-1}(v) \in \mathcal{S}\otimes\tau \quad \text{محققة}$$

أياً كانت v المفتوحة في $\mathbb{R}$.

$$f_x : Y \to \overline{\mathbb{R}} \quad \text{قصة } f \text{ وفق } x$$

$$y \mapsto f_x(y) = f(x,y)$$

$$(f_x)^{-1}(v) \overset{?}{\in} \tau$$

$$y\in f_x^{-1}(v) \Leftrightarrow f_x(y)\in v$$

$$y\in f_x^{-1}(v) \Leftrightarrow f(x,y)\in v$$

$$(x,y)\in f^{-1}(v)$$

$$y \in \left(f^{-1}(v)\right)_x$$

$f^{-1}(v)$ مجموعة قيوسة وبالتالي قصتها $\left(f^{-1}(v)\right)_x$ قيوسة

أي أنَّ f_x قيوس.

لنثبت أنّ f_y قيوس :

$f_y : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ مقطع f وفق y

$x \longmapsto f_y(x) = f(x,y)$

$$(f_y)^{-1}(\mathcal{U}) \overset{?}{\in} \mathcal{S}$$

$$x \in f_y^{-1}(\mathcal{U}) \Longleftrightarrow f_y(x) \in \mathcal{U}$$

$$\Longleftrightarrow f(x,y) \in \mathcal{U}$$

$$(x,y) \in f^{-1}(\mathcal{U})$$

$$x \in (f^{-1}(\mathcal{U}))_y$$

$f^{-1}(\mathcal{U})$ قيوسة و بالتالي مقطعها y $(f^{-1}(\mathcal{U}))$ قيوسة

تمرين :

احسب : $\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \, dx \right) dy \quad ; (x,y) \neq (0,0)$

مثال معاكس لمبرهنة فوبيني (لا يحقق شرط فوبيني)

تمرين :

إذا كان لدينا التابع :

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + \ln(1 - x^2 - y^2)$$

فإنّ :

${}_a f : Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ مقطع f وفق a

$y \longmapsto {}_a f(y) = f(a,y)$

$= a^2 + y^2 + \ln(1 - a^2 - y^2)$

$f_b : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$

$x \longmapsto f_b(x) = f(x,b) = x^2 + b^2 + \ln(1 - x^2 - y^2)$

انتهت المحاضرة العاشرة