المحاضرة الخامسة عشرة ..

الخميس 14/ 5/ 2015 ..

تدريب:

لنأخذ $X = \mathbb{N}$ ولنأخذ $\mathcal{S}$ صف المجموعات الأحادية (أي التي تتألف من عنصر واحد):

$$\mathcal{S} = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \dots\}$$

إن $\mathcal{S}$ ليس حلقة، سنوجد أصغر حلقة تحويه ونرمز لها $\overset{ح}{\mathcal{S}}$

$$\overset{ح}{\mathcal{S}} = \{\Phi, \{0\}, \{1\}, \dots, \{0,1\}, \{0,2\}, \dots, \{1,2,3\}, \dots\}$$

نرى أن $A \in \overset{ح}{\mathcal{S}} \iff A = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$

$\overset{ح}{\mathcal{S}}$ هي صف المجموعات المنتهية وإن صف المجموعات المنتهية هو حلقة وذلك لأن Φ مجموعة منتهية فهي من $\overset{ح}{\mathcal{S}}$ كما أن اجتماع وتقاطع وفرق أي مجموعتين منتهيتين هو مجموعة منتهية.

أصغر جبر يحوي الصف $\mathcal{S}$ سنرمز له بـ $\overset{ج}{\mathcal{S}}$

$A \in \overset{ج}{\mathcal{S}} \iff A$ منتهية أو $\hat{A}$ منتهية

أما أصغر جبر تام يحوي الصف $\mathcal{S}$ هو صف المجموعات المعدودة أو التي متمماتها معدودة.

(اقرأ التمرين 2 صفحة 207)

المجموعة المهملة: Neglegable Set

$A \subseteq X$ مهملة بالنسبة للقياس $\mu \iff A \subseteq B \,;\, \exists B \in \mathcal{S} : \mu(B) = 0$

أي توجد مجموعة قيوسة B قياسها يساوي الصفر بحيث تكون A مجموعة جزئية منها

سؤال:

هل صف المجموعات المهملة بالنسبة لقياس μ يكوّن حلقة؟

نلاحظ أن:

$\mu(\Phi) = 0 \Rightarrow \Phi$ مهملة

($A = \Phi$ و $\mathcal{S} \ni B = \Phi \Rightarrow A = \Phi$ مهملة)

ملاحظة: كل مجموعة قيوسة قياسها يساوي الصفر تكون مجموعة مهملة

أي إذا كانت $A \in \mathcal{S}$ و $\mu(A) = 0$ فإنه $\exists B = A : \mu(B) = 0$

$A \subseteq B$

كذلك إنَّ كل مجموعة جزئية من مجموعة مهملة تكون مهملة.

إذا كانت A مهملة و كانت $A_1 \subseteq A$ لنثبت أن A_1 مهملة:

بما أنَّ A مهملة فإنه:

$$\exists B \in \mathcal{S} : \mu(B) = 0 : A \subseteq B$$

أصبح لدينا $A_1 \subseteq A \subseteq B$

وبالتالي:

$$\exists B \in \mathcal{S} : \mu(B) = 0 : A_1 \subseteq B \Rightarrow$$ A_1 مهملة.

تدريب:

لنأخذ $X = \mathbb{R}$ و μ هو قياس لوبيغ على $\mathbb{R}$ (يقيس كل مجال بطوله)

هل المجموعة $A = \{a\}$ مهملة أم لا:

$$\{a\} = [a, a] \Rightarrow \mu(\{a\}) = \mu([a, a]) = a - a = 0$$

وبالتالي A مهملة.

لتكن المجموعة $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ هل المجموعة A مهملة:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \underbrace{\{1\} \cup \{2\} \cup \dots \cup \{6\}}_{\text{مجموعات منفصلة}}$$

وبالتالي:

$$\mu(A) = \mu([1,1]) + \mu([2,2]) + \dots + \mu([6,6])$$
$$= 0 + 0 + \dots + 0 = 0$$

وبالتالي تكون A مهملة.

وإذا أخذنا $A = \mathbb{N}$ فإن $\mathbb{N}$ مهملة حيث $\mu(\mathbb{N}) = 0$

إذا أخذنا $A \subseteq \mathbb{N}$ معدودة

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$$

فإنَّ:

$$\mu(A) = \mu(\{x_1\}) + \mu(\{x_2\}) + \dots + \mu(\{x_n\}) + \dots$$
$$= 0 + 0 + \dots + 0 + \dots = 0$$

إنَّ $\mathbb{Z}$ قياسها الصفر حيث $\mathbb{Z}$ معدودة وكذلك $\mathbb{Q}$

أما $\mathbb{R}$ قياسها ∞ وذلك بالنسبة لقياس لوبيغ على $\mathbb{R}$

وبالتالي:

قياس كل مجموعة معدودة أو منتهية هو الصفر بالنسبة لقياس لوبيغ على $\mathbb{R}$

إثبات أن اجتماع مجموعتين مهملتين هو مجموعة مهملة:

(ملاحظة: إن التقاطع و الفرق لمهملتين هو مجموعة مهملة)

لتكن A_1 , A_2 مجموعتان مهملتان،

A_1 مهملة $\Leftarrow$ $\exists B_1 \in \mathcal{S} : \mu(B_1) = 0 \quad : A_1 \subseteq B_1$

A_2 مهملة $\Leftarrow$ $\exists B_2 \in \mathcal{S} : \mu(B_2) = 0 \quad : A_2 \subseteq B_2$

لنضع $A = A_1 \cup A_2$ و $B = B_1 \cup B_2$

إن $A \subseteq B$

كما أن $B \in \mathcal{S}$ لأن اجتماع عنصرين من $\mathcal{S}$ هو عنصر منه

$$0 \leq \mu(B) = \mu(B_1 \cup B_2) \leq \mu(B_1) + \mu(B_2) = 0 + 0 = 0$$

أصبح لدينا:

$$\exists B \in \mathcal{S} : \mu(B) = 0 \quad : A \subseteq B$$

وبالتالي A مجموعة مهملة.

بما أنه لدينا $A_1 \cap A_2 \subseteq A_1$

$A_1 - A_2 \subseteq A_1$

فإنه يكون صف المجموعات المهملة بالنسبة لقياس μ هو حلقة (تحققت الشروط)

هل هو حلقة تامة؟

إذا كانت $(A_j)_{j \geq 1}$ متتالية من المجموعات المهملة فإنه:

$$\exists B_j \in \mathcal{S} . \mu(B_j) = 0 \quad ; A_j \subseteq B_j$$
$$j = 1, 2, \dots$$

لنضع: $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ و $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ إن $B \supseteq A$

و $B \in \mathcal{S}$ لأن الاجتماع المعدود لمجموعات قيوسة هو مجموعة قيوسة.

$$0 \leq \mu(B) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \mu(B_1) + \dots + \mu(B_n) + \dots$$
$$= 0 + \dots + 0 + \dots = 0$$

$$\Rightarrow \mu(B) = 0$$

وبالتالي تحقق أن: $\exists B \in \mathcal{S} : \mu(B) = 0 \quad : A \subseteq B$

وبالتالي A مجموعة مهملة إذن صف المجموعات المهملة هو حلقة تامة

إذن إنّ صنف المجموعات المهملة بالنسبة لقياس معطى هو حلقة تامة وليس بالضرورة أن يكون جبراً تاماً ويكون جبراً فقط إذا كان $\mu(X)=0$.

ملاحظة:

ليس من الضروري أن تكون المجموعة المهملة منتمية إلى الجبر التام المعطى.

تعريف:

نقول عن الفضاء (X, S, μ) إنه فضاء مقيس كامل إذا كانت كل مجموعة مهملة μ مقيوسة أي تنتمي إلى الجبر التام S.

مبرهنة كارا تيودوري الكبرى:

لتكن $X \neq \phi$ و μ^* قياس خارجي عليها:

أ- إنّ μ^* يولد جبراً تاماً $\mathcal{M}^*$ من أجزاء X ويكون مقصور μ^* عليه قياساً كاملاً.

ب- إذا كان μ قياساً معطى على جبر $\mathcal{A}$ فإنّ μ^* المعرف كما يلي:

$$\mu^* : P(X) \rightarrow [0, +\infty]$$
$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supseteq A \right\}$$

هو قياس خارجي يمدد μ و $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}^*$.

تمرين:

إذا كان (X, S, μ) فضاء مقيس غير كامل ولنضع $(X, \bar{S}, \bar{\mu})$ حيث:

$$\bar{S} = \{E \subseteq X ,\ \exists A, B \in S : A \subseteq E \subseteq B : \mu(B - A) = 0\}$$

عندئذ: $\bar{\mu}(E) = \mu(A)$

المطلوب:

اثبت أنّ: 1- $\bar{S}$ جبر تام

2- $S \subseteq \bar{S}$ (يتم إذا أخذنا $F = \phi$)

3- $\bar{\mu}$ قياس على $\bar{S}$ يمدد μ

4- $\bar{\mu}$ قياس كامل.

لنأخذ N صنف المجموعات المهملة، ولنضع:

$\bar{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \cup \mathcal{N}$

$\bar{\mathcal{S}} = \{ E = A \cup N \;;\; A \in \mathcal{S} \;,\; N \in \mathcal{N} \}$

مقيوسة — مهملة-م

وبالتالي إذا كانت $E \in \bar{\mathcal{S}}$ فإنّ $E = A \cup N$ ولنبرهن أنه توجد $A, B \in \mathcal{S}$
بحيث $A \subseteq E \subseteq B$ و $\mu(B - A) = 0$.
إذاً $E = A \cup N$ حيث A مقيوسة و N مهملة-μ.
بما أنّ N مهملة-μ فإنّ:

$$\exists B_1 \in \mathcal{S} : \mu(B_1) = 0 \quad ; \quad N \subseteq B_1$$

$$A \subseteq E = A \cup N \subseteq A \cup B_1 = B$$

ومنه تكون $B \in \mathcal{S}$ لأن $B_1 \in \mathcal{S}$ و $A \in \mathcal{S}$ واجتماع مقيوستين مجموعة مقيوسة.
وبالتالي أصبح لدينا $A \subseteq E \subseteq B$

$$\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A) = \mu(A \cup B_1) - \mu(A)$$
$$\leq \mu(A) + \mu(B_1) - \mu(A) = \mu(B_1)$$
$$= 0$$

وبالتالي $\mu(B - A) = 0$ حيث $A \subseteq B$.
(انظر المبرهنة الأساسية صـ30)
لإثبات مبرهنة كاراتيودوري:
أ: إثبات أنّ Φ و $X \in m^*$

$$\forall K \subseteq X : \mu^*(K) = \mu^*(K \cap \Phi) + \mu^*(K \cap \Phi^c) = \mu^*(\Phi) + \mu^*(K \cap X)$$
$$= 0 + \mu^*(K) = \mu^*(K)$$

$$\Rightarrow \Phi \in m^*$$

$$\forall K \subseteq X : \mu^*(K) = \mu^*(K \cap X) + \mu^*(K \cap X^c) = \mu^*(K) + \mu^*(K \cap \Phi)$$
$$= \mu^*(K) + \mu^*(\Phi) = \mu^*(K) + 0$$
$$= \mu^*(K).$$

$$\Rightarrow X \in m^*$$

خ: $A \in m^* \Rightarrow A^c \in m^*$

$A \in m^* \Leftrightarrow \forall K \subseteq X : \mu^*(K) = \mu^*(K \cap A) + \mu^*(K \cap A^c)$

$= \mu^*(K \cap A^c) + \mu^*(K \cap (A^c)^c)$

$\Rightarrow A^c \in m^*$

خ٢: $A, B \in m^* \Rightarrow A \cup B \in m^*$

لنفرض أنّ $A, B \in m^*$ ولنبرهن أنّ $A \cup B \in m^*$

لنضع $D = A \cup B$ ولنبرهن أن $D \in m^*$، أي أنّ:

$\forall K \subset X : \mu^*(K) = \mu^*(K \cap D) + \mu^*(K \cap D^c)$

بما أن $A \in m^*$ فإنّ:

$\forall K \subseteq X : \mu^*(K) = \mu^*(K \cap A) + \mu^*(\underbrace{K \cap A^c}_{K_1})$

$\mu^*(K) = \mu^*(K \cap A) + \mu^*(K_1)$

وبما أنّ $B \in m^*$ فإنّ:

$\mu^*(K_1) = \mu^*(K_1 \cap B) + \mu^*(K_1 \cap B^c)$

$= \mu^*(K \cap A^c \cap B) + \mu^*(K \cap A^c \cap B^c)$

وبالتالي:

$\mu^*(K) = \mu^*(K \cap A) + \mu^*(K \cap A^c \cap B) + \mu^*(K \cap A^c \cap B^c)$

ولكن $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = D^c$

$\mu^*(K) = \mu^*(K \cap A) + \mu^*(K \cap A^c \cap B) + \mu^*(K \cap D^c)$

$\geq \mu^*((K \cap A) \cup (K \cap A^c \cap B)) + \mu^*(K \cap D^c)$

ولكن: $(K \cap A) \cup (K \cap A^c \cap B) = K \cap (A \cup (A^c \cap B))$

$= K \cap ((A \cup A^c) \cap (A \cup B))$

$= K \cap (X \cap (A \cup B))$

$= K \cap (A \cup B) = K \cap D$

وبالتالي:

$\mu^*(K) \geq \mu^*(K \cap D) + \mu^*(K \cap D^c) \geq \mu^*(K \cap (D \cup D^c)) = \mu^*(K)$

وبالتالي $\mu^*(K)=\mu^*(K\cap D)+\mu^*(K\cap D^c)$

$\Rightarrow D \in m^*$; $D = A\cup B$

ج: $\forall K: \mu^*(K\cap(\bigcup_{i=1}^n A_i)) = \sum_{i=1}^n \mu^*(K\cap A_i)$

حيث $A_1,\dots,A_n \in m^*$ منفصلة

أولاً: لنثبت أنه إذا كان $A,B\in m^*$: $A\cap B=\phi$

عندئذٍ $\mu^*(A\cup B)=\mu^*(A)+\mu^*(B)$

لنفرض $K=A\cup B$

وبما أن $A\in m^*$ فإن: $\mu^*(K)=\mu^*(K\cap A)+\mu^*(K\cap A^c)$

ولكن:

$K\cap A=(A\cup B)\cap A = A$

$K\cap A^c = (A\cup B)\cap A^c = (A^c\cap A)\cup(A^c\cap B)=A^c\cap B = B$

ولدينا $B\subseteq A^c \Leftarrow A\cap B=\phi$

وبالتالي $\mu^*(K)=\mu^*(A\cup B)=\mu^*(A)+\mu^*(B)$

ويمكن أن أعمم هذه الخاصة:

$\mu^*(\bigcup_{i=1}^n A_i)=\sum_{i=1}^n \mu^*(A_i)$

الآن لنثبت أنه:

if $A,B\in m^*$: $A\cap B=\phi$

$\forall K\subseteq X: \mu^*(K\cap(A\cup B))=\mu^*(K\cap A)+\mu^*(K\cap B)$

لنفرض $K_1=K\cap(A\cup B)$

وبما أن $A\in m^*$ فإن:

$\mu^*(K_1)=\mu^*(K_1\cap A)+\mu^*(K_1\cap A^c)$

$K_1\cap A=(K\cap(A\cup B))\cap A=(K\cap A)\cap(A\cap(A\cup B))=(K\cap A)\cap((A\cap A)\cup(A\cap B))$

$=K\cap A$

$K_1\cap A^c=(K\cap(A\cup B))\cap A^c=(K\cap A^c)\cap(A^c\cap(A\cup B))=(K\cap A^c)\cap((A^c\cap A)\cup(A^c\cap B))$

$=(K\cap A^c)\cap(\phi\cup B)=K\cap(A^c\cap B)=K\cap B$

وبالتالي: $\mu^*(K) = \mu^*(K \cap (A \cup B)) = \mu^*(K \cap A) + \mu^*(K \cap B)$

مبرهنة:
إذا كان μ قياساً موجباً على جبر $\mathcal{M}$ من أجزاء X، وإذا كان $\mathcal{M}^*$ هو صنف المجموعات القيوسية بالنسبة لـ μ^* المستنتج من μ فإنّ:
أ- ν " مقصور μ^* على $\mathcal{M}^*$ يساوي μ
ب- $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}^*$

نتيجة:
كل قياس μ منتهٍ على جبر $\mathcal{A}$ يمكن تمديده إلى الجبر التام $\bar{\mathcal{A}}$ وهذا التمديد وحيد.

تعريف ومبرهنة:
يقال عن قياس ν على جبر تام $\mathcal{M}$ إنّه قياس (كامل أو شامل) إذا:
$\forall A \in \mathcal{M} \quad : \text{if } \nu(A) = 0 \text{ then } P(A) \in \mathcal{M}.$
إنّ مقصور أي قياس خارجي μ^* على الجبر التام $\mathcal{M}^*$ المولد به هو قياس شامل.

انتهت المحاضرة ..