" التمارين المحلولة من الكتاب "

بعض التمارين وردت في المحاضرات.

الفصل الأول:

- مبرهنة الوجود والوحدانية -

1- مثال (3) صفحة 43:

أثبت أن استمرار الدالة $f(x,y)$ ليس كافياً لضمان وحدانية حل مسألة القيمة الابتدائية:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = \sqrt{|y|} \quad ; \quad y(0)=0$$

أو بعبارة أخرى: أثبت أن حل مسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad ; \quad y(x_0) = y_0$$

يمكن أن يكون لها أكثر من حل بالرغم من أن $f(x,y)$ دالة مستمرة.

الحل:

لنعتبر مسألة القيمة الابتدائية:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{|y|} \quad ; \quad y(0)=0$$

واضح أن $f(x,y) = \sqrt{|y|}$ دالة مستمرة لكل قيم y وأن المعادلة (1) لها الحلان

$$y=0 \quad , \quad y = \begin{cases} x^2/4 & ; \quad x \geq 0 \\ -x^2/4 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

وفي هذه الحالة نثبت أن شرط ليبشتز:

$$\frac{|f(x,y_2)-f(x,y_1)|}{y_2-y_1} \leqslant K$$

يتحقق في أي منطقة تحتوي على المستقيم $y=0$ ، فمثلاً عندما $y_1=0$ و $y_2 \neq 0$ فإن:

$$\frac{|f(x,y_2)-f(x,y_1)|}{y_2-y_1} = \frac{\sqrt{y_2}}{y_2} = \frac{1}{\sqrt{y_2}} \quad (\sqrt{y_2}>0)$$

يتبين أن المقدار في الطرف الأيسر يمكن جعله كبيراً كما نريد باختيار y_2 صغيرة صغراً كافياً ، وهذا يتعارض مع (2) حيث إن المقدار في الطرف الأيسر يجب أن لا يتجاوز عدد ثابت K.

2. مثال (5) صفحة 45:

من أجل مسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{dy}{dx} = e^{y} \quad ; \quad y(0)=0$$

أوجد أكبر فترة $|x| \leqslant a$ التي يكون فيها لمسألة القيمة الابتدائية المفروضة حل وحيد.

الحل:

لتكن $M \leqslant |f(x,y)|$ وعلى ذلك فإن $|y-y_0| \leqslant M.a$

(وذلك حسب مبرهنة الوجود والوحدانية حيث a بدلاً من h ووضعنا $y_0=0$)

أي:

$$e^{y} \leqslant M \qquad , \qquad |y-0| < Ma$$

لتكن y_2 و y_1 في المنطقة $|y| \leqslant Ma$ ، $y_1 < y_2$ فإنه باستخدام مبرهنة القيمة الوسطى نجد أن:

$$e^{y_2} - e^{y_1} = (y_2-y_1)\left(\frac{\partial}{\partial y} e^{y}\right)_{y=\bar{y}} \quad , \quad \bar{y} \in (y_1, y_2)$$

أي:
$$e^{y} < M \qquad \text{لأن} \qquad e^{y_2} - e^{y_1} \leqslant (y_2 - y_1) M$$
وهذا يبين أن $e^{y} < M$ لم تحقق شرط ليبشتز. وكذلك فإن المتباينة سوف تتحقق لكل قيم y حيث إن

$|y| \leqslant Ma$ بشرط أن لكل Ma $y = Ma$ فإن:

$$e^{Ma} \leqslant M$$

أو:

$$a \leqslant \ln M / M$$

باستخدام طرق إيجاد القيم العظمى والصغرى لدالة ما يمكنه بسهولة أن نثبت أن الدالة $(\ln M)/M$ لاقيمة عظمى عندما $M = e = 2.718$ ومن ثم فإن مبرهنة الوحدانية لمسألة القيمة الابتدائية تعطي

$|x| \leqslant a$ عندما $a = 1/e = 0.308$ ومن ثم تكون أكبر فترة هي

$$|x| \leqslant 0.308$$

3- مثال 6 صفحة 46:

أثبت أنه في مسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{dy}{dx} = y \quad , \quad y(0) = 1$$
، يجب أن يكون الثابت a

في مبرهنة بيكارد أقل من الواحد.

الحل:

لكن $M > |f(x,y)|$، فإن $|y - y_0| \leqslant Ma$ (كما في المثال السابق)

ومع ذلك فإن: $|y - 1| \leqslant Ma$، حيث $|y| \leqslant M$

باختيار $M \geq 1$. فإن شرط ليبشتز يتحقق أيضاً لأنه في هذه الحالة يكون لدينا:

$$|f(x,y_2) - f(x,y_1)| = |y_2 - y_1| \leq M|y_2 - y_1| \; ; \; M \geq 1$$

وكذلك:

$$|y-1| \leq M.a \Rightarrow |y| - 1 \leq M\,a$$

ومن ذلك يلي أن الشرط $|y| \leq M$ سوف يتحقق لكل قيم $|y-1| \leq M\,a$ حيث إن $|y| = 1 + Ma$ وعلى ذلك فإن:

$$1 + Ma \leq M \Rightarrow a < (M-1)/M = 1 - \frac{1}{M} < 1$$

عندما $1 \leq M < \infty$

4- مثال محلول صفحة 58:

أثبت أن مسألة القيمة الابتدائية:

$$y'' + g(t,y) = 0 \quad , \quad y(0) = y_0 \quad , \quad y'(0) = z_0$$

حيث g دالة مستمرة في منطقة ما D تحتوي $(0, y_0)$ تكافئ المعادلة التكاملية:

$$y(t) = y_0 + z_0 t - \int_0^t (t-s)\, g(s, y(s))\, ds$$

الحل:

ليكن $\phi(t)$ حلاً لمسألة القيمة الابتدائية أي أن:

$$\phi'' + g(t, \phi(t)) = 0$$

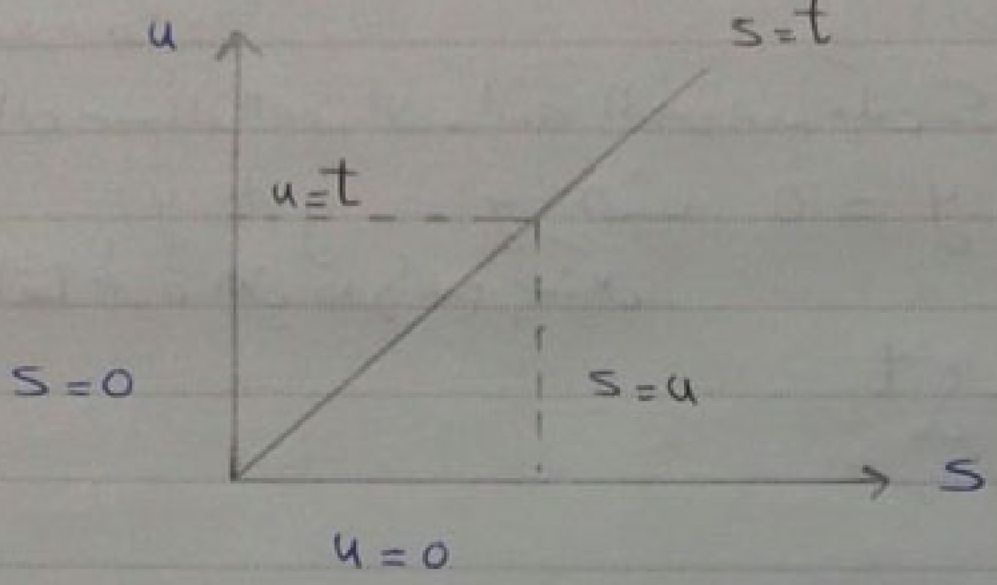
وبالتكامل مرتين نحصل على:

$$\phi(t) = -\int_0^t \int_0^u \{ g(s, \phi(s))\, ds \}\, du + a + bt \quad (1)$$

وحيث إن: $\phi'(0) = z_0 \quad , \quad \phi(0) = y_0$

فإن: $a = y_0 \quad , \quad b = z_0$

والتكامل الثاني ممتد على المنطقة في المستوى us كما هو مبين بالشكل المرسوم:



وبمبادلة ترتيب التكامل نحصل على:

$$\int_0^t \left\{ \int_0^u g(s,\phi(s))\,ds \right\} du = \int_0^t \left\{ \int_s^t du \right\} g(s,\phi(s))\,ds$$

$$= \int_0^t (t-s)\, g(s,\phi(s))\,ds \qquad (2)$$

وبالتعويض من (2) في (1) نحصل على:

$$\phi(t) = -\int_0^t (t-s)\, g(s,\phi(s))\,ds + y_0 + z_0 t$$

وإذا فرضنا أن ψ هو حل للمعادلة التكاملية فإن

$$\psi(0) = y_0 \quad ; \quad \psi'(0) = z_0$$

ومن ثم فإن $\psi(t)$ تحقق الشروط الابتدائية المذكورة، وباستخدام المبرهنة الأساسية في التفاضل والاشتقاق مرتين نجد أن:

$$\psi'(t) = z_0 - \int_0^t g(s,\psi(s))\,ds$$

$$\psi''(t) = -g(t,\psi(t))$$

ومن ثمَّ بأنَّ φ هو حل لمسألة القيمة الابتدائية

ملاحظة:

إن مسألة القيمة الابتدائية المفروضة يمكن كتابتها على الشكل
$y'' = -g(t,y)$ حيث $y'' = 0$ هي المعادلة التفاضلية المتجانسة
المتناظرة التي حلها على الشكل.

$$y = y_0 + z_0 t$$

انتهى البحث الأول.

/ /

الفصل الثاني:

- متسلسلات الحلول للمعادلات التفاضلية الخطية -

١- مثال 2 صفحة 78:

أوجد متسلسلة الحل في قوى z لمعادلة آيري:

$$w'' = zw \quad ; \quad -\infty < z < +\infty$$

في جوار الصفر.

الحل:

في هذه المعادلة لدينا $p(z) = 0$ ، $Q(z) = -z$ إذن $z = 0$ هي نقطة عادية.

نفرض الحل على الشكل: $w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

بالمفاضلة نحصل على:

$$w'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} z^n$$

$$\underset{\text{نستبدل}}{n \longrightarrow n+2}$$

بالتعويض في المعادلة المفروضة نحصل على:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} z^n = z \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1}$$

أو:

$$2.1 a_2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} z^n$$

وهذه المطابقة تتحقق إذا تساوت معاملات كل من قوى z في الطرفين إذن: $a_2 = 0$

ونحصل على العلاقة التكرارية:

$$(n+1)(n+2) a_{n+2} = a_{n-1} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

/ /

إذن المعامل a_{n+2} يعطى بدلالة المعامل a_{n-1} ومن الواضح أن المعاملات يمكن أن تعين في ثلاث خطوات، حيث:

a_0 يعين a_3 والذي هو بدوره يعين a_6 ----

a_1 يعين a_4 والذي هو بدوره يعين a_7 ----

و a_2 يعين a_5 والذي هو بدوره يعين a_8 ----

وبما أن $a_2 = 0$ إذن نستنتج مباشرة أن $0 = \dots = a_{11} = a_3 = a_5$ بالنسبة للمعاملات a_3, a_6, a_9, a_0 نأخذ

$n = 1, 4, 7, 10, \dots$ في العلاقة التكرارية فنجد أن:

$$a_3 = \frac{a_0}{3.2}, \quad a_6 = \frac{a_3}{6.5} = \frac{a_0}{(6.5)(3.2)}, \quad a_9 = \frac{a_6}{(9.8)} = \frac{a_0}{(9.8)(6.5)(3.2)} \dots$$

ومن الأفضل يمكن كتابة علاقة a_{3n} ، $n = 1, 2, 3, \dots$ حيث:

$$a_{3n} = \frac{1}{[(3n)(3n-1)][(3n-3)(3n-4)]\dots[6.5][3.2]} a_0 \quad ; n = 1, 2, 3, \dots$$

بالنسبة للمعاملات:

$a_1, a_4, a_7, a_{10}, \dots$ نأخذ $n = 2, 5, 8, 11, \dots$ في العلاقة التكرارية

فنجد أن:

$$a_4 = \frac{a_1}{4.3}, \quad a_7 = \frac{a_4}{7.6} = \frac{a_1}{(7.6)(4.3)}, \quad a_{10} = \frac{a_7}{10.9} = \frac{a_1}{(10.9)(7.6)(4.3)}, \dots$$

ونجد أن:

$$a_{3n+1} = \frac{1}{[(3n+1)(3n)][(3n-2)(3n-3)]\dots[7.6][4.3]} a_1 \quad ; n = 1, 2, \dots$$

ويكون حل المعادلة التفاضلية (معادلة آيري) من الشكل:

$$w = a_0\left[1+\frac{z^3}{3.2}+\frac{z^6}{6.5.3.2}+\cdots+\frac{z^{3n}}{(3n)(3n-1)\cdots3.2}+\cdots\right]$$

$$+a_1\left[z+\frac{z^4}{7.6.4.3}+\cdots+\frac{z^{3n+1}}{(3n+1)(3n)(3n-2)(3n-3)\cdots4.3}+\cdots\right]$$

$$= a_0\left[1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^{3n}}{(3n)(3n-1)(3n-4)\cdots3.2}\right]+a_1\left[z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{3n+1}}{(3n+1)(3n)(3n-2)\cdots4.3}\right]$$

إذن الحل العام لمعادلة آيري هو

$$w = a_0 w_1 + a_1 w_2$$

حيث

$W(w_1, w_2) = 1 \neq 0$ وهذه متسلسلة متقاربة من أجل قيم z.

2- مثال (5) صفحة 83:

أوجد مجال تقارب متسلسلة الحل حول $z = 0$ لمعادلة لوجاندر:

$$(1-z^2)w'' - 2zw' + \lambda(\lambda+1)w = 0$$

حيث λ ثابتة

الحل:

نلاحظ أن المعادلة تكتب على الشكل:

$$p(z)w'' + Q(z)w' + R(z)w = 0$$

حيث

$p(z) = 1 - z^2$ ؛ $Q(z) = -2z$ ، $R(z) = \lambda(\lambda+1)$

وصفر الدالة p هما: ∓ 1 أي إن المسافة بين المركز $z = 0$ هي 1

إذن المتسلسلة:

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

متقاربة من أجل $|z| < 1$ على الأقل كما هو محقق منا أجل قيم z ويمكن أن نثبت أيضاً في حالة λ عدد موجب صحيح أن إحدى متسلسلتي الحل منتهية ومن ثم فهي متقاربة من أجل جميع قيم z.

مثال: في حالة $\lambda = 1$ ، الحل هو $w = z$

3- مثال (6) صفحة 84:

أوجد مجال تقارب متسلسلة الحل للمعادلة التفاضلية:

$$(1+z^2)w'' + 2zw' + 4z^2 w = 0$$

حول النقطة $z = 0$ وحول النقطة $z = -1/2$

الحل:

لدينا:

$$P(z) = 1 + z^2 , \quad Q(z) = 2z , \quad R(z) = 4z^2$$

وتنعدم الدالة P من أجل $z = i , -i$

المسافة في المستوي المركب من 0 إلى $\mp i$ هي 1 ومن $-1/2$ إلى $\mp i$ هي:

$$\sqrt{1 + 1/4} = \sqrt{5}/2$$

إذن في الحالة الأولى المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ متقاربة على الأقل من أجل $|z| < 1$

وفي الحالة الثانية المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z+1/2)^n$ متقاربة على الأقل من أجل

$$|z + 1/2| < \sqrt{5}/2$$

4 مثال (7) صفحة 85:

هل يمكن تعيين متسلسلة الحل حول $z = 0$ للمعادلة التفاضلية:

$$w'' + (\sin z)w' + (1+z^2)w = 0$$

وإذا كان ممكناً فما هو نصف قطر التقارب.

الحل:

في هذه المعادلة لدينا:

$$Q(z) = 1 + z^2 \quad , \quad p(z) = \sin z$$ وبما أن الدالة

$p(z) = \sin z$ يمكن أن تكتب على شكل متسلسلة تايلور حول النقطة $z = 0$

وهي متقاربة من أجل جميع قيم z.

أيضاً: الدالة $Q(z) = 1 + z^2$ يمكن أن تكتب على شكل متسلسلة تايلور

حول النقطة $z = 0$ وهي متقاربة من أجل جميع قيم z.

إذن فإن للمعادلة متسلسلة حل من الشكل:

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

حيث a_0 و a_1 ثابتان اختياريان والمتسلسلة متقاربة من أجل جميع قيم z.

مثال (8) صفحة 86:

حل مسألة القيم الابتدائية التالية على شكل متسلسلة قوى حول النقطة $z = 1$

وأوجد نصف قطر تقارب هذا الحل

$$(z^2 - 2z + 2)w'' + 2(z-1)w' = 0$$

$$, \; w(1) = 1 \quad ; \quad w'(1) = \frac{4}{\pi}$$

الحل:

لدينا:

$$p(z) = \frac{2(z-1)}{z^2 - 2z + 2} = \frac{2(z-1)}{(z-1)^2 + 1} \quad , \quad Q(z) = 0$$

وواضح أن $p(z)$ ، $Q(z)$ تحليليتان عند $z = 1$ ، ومن ثم فالنقطة $z = 1$

هي نقطة عادية ويمكن كتابة الحل على شكل متسلسلة قوى بقوى $z - 1$.

ولحساب نصف قطر التقارب نوجد أقرب نقطة شاذة للنقطة العادية $z = 1$

وواضح أن $p(z) = \infty$ إذا كان $(z-1)^2 = -1$ أي إذا كان $z = 1 \mp i$

وهاتان النقطتان الشاذتان متساويتا البعد عن النقطة $z = 1$. حيث هذا البعد يساوي الواحد.

وعلى ذلك يكون $R_c = 1$ مما يعني أن متسلسلة الحل تتقارب في المجال $|z-1| < 1$

وسنستخدم طريقتين للحصول على هذا الحل.

الطريقة الأولى:

ننقل المحاور إلى النقطة $z = 1$ عن طريق التعويض $z = t + 1$ ومع ذلك يصبح

$$\frac{d^2}{dz^2} = \frac{d^2}{dt^2} \quad , \quad \frac{d}{dz} = \frac{d}{dt}$$

وتؤول المعادلة المفروضة إلى:

$$[(t+1)^2 - 2(t+1) + 2]\, w'' + 2t w' = 0$$

أو:

$$(t^2+1)\, w'' + 2t w' = 0$$

حيث الاشتقاق الآن بالنسبة إلى t . نفرض الحل على شكل متسلسلة قوى:

$$w(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \Rightarrow w'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} \Rightarrow w''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

بالتعويض في المعادلة وتجميع الحدود المتشابهة نحصل على:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)\, a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\, a_n t^{n-2} = 0$$

لحساب معامل t^n نغير في المجموع الثاني $n+2 \longrightarrow n$ ثم نساوي هذا المعامل بالصفر لنحصل على الصيغة التكرارية:

$$n(n+1)\, a_n + (n+1)(n+2)\, a_{n+2} = 0$$

إذاً:

$$a_{n+2} = -\frac{n}{n+2}\, a_n \quad ; \quad n \geq 0$$

ومنه:

$$n = 0 : \quad a_2 = 0 \Rightarrow a_4 = a_6 = a_8 = \ldots = 0$$

$$n=1: \quad a_3 = -\frac{1}{3} a_1$$

$$n=3: \quad a_5 = -\frac{3}{5} a_3 = +\frac{1}{5} a_1$$

$$n=5: \quad a_7 = -\frac{5}{7} a_5 = -\frac{1}{7} a_1$$

إذن:

$$w(t) = a_0 + a_1\left(t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \cdots\right)$$

أو:

$$w(z) = a_0 + a_1\left[(z-1) - \frac{1}{3}(z-1)^3 + \frac{1}{5}(z-1)^5 - \frac{1}{7}(z-1)^7 + \cdots\right]$$

لتعيين الثابتين الاختياريين a_0 ، a_1 نستفيد من الشروط الابتدائية المفروضة:

$$w(1) = a_0 + a_1(0) = a_0 = 1 \Rightarrow a_0 = 1$$

$$w'(z)\Big|_{z=1} = a_1\left[1 - (z-1)^2 + (z-1)^4 - (z-1)^4 - (z-1)^6 + \cdots\right]_{z=1}$$

$$= a_1 = \frac{4}{\pi} \Rightarrow a_1 = \frac{4}{\pi}$$

إذن:

$$w(z) = 1 + \frac{4}{\pi}\left[(z-1) - \frac{1}{3}(z-1)^3 + \frac{1}{5}(z-1)^5 - \frac{1}{7}(z-1)^7 + \cdots\right]$$

الطريقة الثانية:

بما أن $z=1$ نقطة عادية. إذن نفرض حلاً للمعادلة التفاضلية على شكل متسلسلة تايلور حول نقطة البداية $z=1$:

$$w(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^n$$

ووفقاً لشروط البدء: $w(1)=1$ ، $w'(1)=\frac{4}{\pi}$. أما الثابت الأخير

$w^{(n)}(1)$ فنحصل عليه كما يلي: نعوض من شروط البدء في المعادلة المعطاة حيث:
$w(1)=1$ ، $w'(1)=\frac{4}{\pi}$ فنجد:

$$(1-2\times1+2)\,w''(1)=2\,(1-1)\,\frac{\pi}{4}\Rightarrow w''(1)=0$$

نفاضل المعادلة المعطاة:

$$(z^2-2z+2)w'''+(2z-2)w''+2(z-1)w''+2w'=0$$

إذن:

$$(1-2+2)\,w'''(1)+(2-2)\,w''(1)+2\,(1-1)\,w''(1)+2w'(1)=0$$

إذن:

$$w'''(1)=-2\,w'(1)=-\frac{8}{\pi}$$

نفاضل مرة أخرى بغية الحصول على المشتقة الرابعة فنجد أن $w^{(4)}(1)=0$ ومرة أخرى للحصول على المشتقة الخامسة فنجد أن $w^{(5)}(1)=\frac{96}{\pi}$ وهكذا ...
لتكون متسلسلة تايلور للحل هي:

$$w(z)=1+\frac{4}{\pi}(z-1)-\frac{8}{3!\pi}(z-1)^3+\frac{96}{5!\pi}(z-1)^5-\cdots$$

$$w(z)=1+\frac{4}{\pi}\left[(z-1)\frac{1}{3}(z-1)^3+\frac{1}{5}(z-1)^5-\cdots\right]$$

وواضح أن طريقة متسلسلة تايلور تكون أبسط إذا أردنا الحصول فقط على الحدود
الحدود الأولى من المتسلسلة لكنها تطول إذا أردنا حساب الحدود العليا.

/ /

البحث في حل المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من المرتبة الثانية في جوار نقطة شاذة منتظمة.

صياغة أخرى للبرهنة: (مفيدة في ترتيب الأفكار من أجل حل التمارين)

الشرط اللازم والكافي لكي يكون للمعادلة

$$w'' + a(z)w' + b(z)w = 0$$

حل من الشكل:

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^{k+\lambda} \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

هو أن تكون النقطة $z = z_0$ قطباً بسيطاً على الأكثر بالنسبة لـ $a(z)$ وقطباً مضاعفاً على الأكثر بالنسبة لـ $b(z)$، وتكون λ_1, λ_2 عندئذٍ جذري المعادلة الدليلية:

$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda c_0 + d_0 = 0$$

حيث:

1. الفرق بين جذري المعادلة عدد غير صحيح
2. حالة جذر مضاعف
3. الفرق بين جذري المعادلة عدد صحيح سالباً أو موجب.

فإنه عندئذٍ تتم المناقشة التفصيلية وفقاً لما يلي:

لتكن لدينا المعادلة:

$$w'' + a(z)w' + b(z)w = 0$$

ونفرض λ_1, λ_2 جذرا المعادلة الدليلية حيث $\lambda_1 > \lambda_2$ عندئذٍ نميز الحالات التالية:

1. $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{Z}$:

يوجد حلان:

w_1 يوافق الجذر λ_1 وله الشكل: $w = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^{k+\lambda_1}$

w_2 يوافق الجذر λ_2 وله الشكل: $w = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^{k+\lambda_2}$

2- $\lambda_1 = \lambda_2$

يوجد حل وحيد من الشكل: $w_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^{k+\lambda_1}$

نجري أحد التحويلات التالية لإيجاد الحل الثاني:

$$w_2 = w_1 . u$$

أو:

$$w_2 = w_1 \int \frac{e^{-\int a(z)dz}}{(w_1)^2} dz$$

أو:

$$w_2 = w_1 \ln(z-z_0) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$$

3- $\lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{Z}$.

يمكن أن تكون الثوابت معينة وتؤول إلى الحالة الأولى، أي لدينا حلان من الشكل:

$$w_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^{k+\lambda_1} \quad , \quad w_2 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^{k+\lambda_2}$$

ويمكن أن يعطي أحد الجذور الحل العام دفعة واحدة، كما يمكن أن نفشل بإيجاد الحل بالنسبة لأحد الجذور.

تتمة الأمثلة:

5- مثال (2) صفحة 110:

لتكن المعادلة:

$$z^2(1-z)^2 w'' + z(1-z)(1-2z)w' - w = 0$$

حدد نوع النقاط الشاذة؟

الحل:

$$w'' + \frac{z(1-z)(1-2z)}{z^2(1-z)^2} w' - \frac{1}{z^2(1-z)^2} w = 0$$

أو بالشكل:

$$w'' + \frac{1-2z}{z(1-z)} w' - \frac{1}{z^2(1-z)^2} w = 0$$

يلاحظ أن $z=0$ قطب بسيط بالنسبة لأمثال w'، وقطب ثنائي بالنسبة لأمثال w فهي نقطة شاذة منتظمة.

كذلك نجد أن $z=1$ قطب بسيط بالنسبة لأمثال w' وقطب ثنائي بالنسبة لأمثال w فهي نقطة شاذة منتظمة أما بقية النقاط فهي نقاط عادية.

6- مثال (4) صفحة 115:

ابحث في حل المعادلة:

$$4z^2(1-z)w'' + 2z(1-2z)w' + zw = 0$$

في جوار الصفر.

الحل:

$$w'' + \frac{2z(1-2z)}{4z^2(1-z)} w' + \frac{z}{4z^2(1-z)} w = 0$$

$$w'' + \frac{(1-2z)}{2z(1-z)} w' + \frac{1}{4z(1-z)} w = 0$$

$z=0$ قطب بسيط لـ $a(z)$

$z=0$ قطب بسيط لـ $b(z)$ $\Leftarrow$ $z=0$ نقطة شاذة منتظمة

نكتب المعادلة الدليلية:

$$a_1(z) = z \cdot a(z) = z \cdot \frac{1-2z}{2z(1-z)} \Rightarrow a_1(0) = \frac{1}{2} = c$$

$$b_1(z) = z^2 b(z) = z^2 \cdot \frac{1}{4z(1-z)} = \frac{z}{4(1-z)} \Rightarrow b_1(0) = 0 = d$$

ومنه:

$$\lambda(\lambda-1)+c_0\lambda+d_0=0$$
$$\lambda(\lambda-1)+\frac{1}{2}\lambda+0=0$$

$$\Rightarrow 2\lambda(\lambda-1)+\lambda=0$$
$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1=0\\ \lambda_2=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \lambda_1-\lambda_2\notin\mathbb{Z}$$ (الفرق بين الجذرين ليس عدداً صحيحاً)

نحن أمام الحالة الأولى:

نبحث عن حل من الشكل:

(متسلسلة صحيحة معممة)

$$w=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^{k+\lambda} \quad \text{وحيث } c_0\neq 0$$

بالاشتقاق نجد:

$$w'=\sum_{k=0}^{\infty}(k+\lambda)c_k z^{k+\lambda-1}$$

$$w''=\sum_{k=0}^{\infty}(k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k z^{k+\lambda-2}$$

نعوض في المعادلة التفاضلية المفروضة:

$$4z^2(1-z)\sum_{k=0}^{\infty}(k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k z^{k+\lambda-2}+2z(1-2z)\sum_{k=0}^{\infty}(k+\lambda)c_k z^{k+\lambda-1}+\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^{k+\lambda+1}=0$$

نضرب ونختصر على z^{λ}:

$$\sum_{k=0}^{\infty}4(k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k z^{k}-\sum_{k=0}^{\infty}4(k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k z^{k+1}$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}2(k+\lambda)c_k z^{k}-\sum_{k=0}^{\infty}4(k+\lambda)c_k z^{k+1}+\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^{k+1}=0$$

نكتب المعادلة المميزة:

$$\zeta^0 : 4\lambda(\lambda-1)c_0 + 2\lambda c_0 = 0 \quad ; \quad c_0 \neq 0$$

$$c_0\left[4\lambda(\lambda-1)+2\lambda\right]=0$$

$$2\lambda(\lambda-1)+\lambda=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=0 \ \wedge \ \lambda_2=\frac{1}{2} \quad ; \quad \lambda_1-\lambda_2 \notin \mathbb{Z}$$

نتابع عملية المطابقة:

$$\zeta^k : 4(k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k - 4(k+\lambda-1)(k+\lambda-2)c_{k-1} + 2(k+\lambda)c_k$$
$$-4(k+\lambda-1)c_{k-1} + c_{k-1} = 0$$

$$\Rightarrow \left[4(k+\lambda)(k+\lambda-1)+2(k+\lambda)\right]c_k - \left[4(k+\lambda-1)(k+\lambda-2)\right.$$
$$\left.+4(k+\lambda-1)-1\right)c_{k-1} = 0$$

$$\Rightarrow \left[2(k+\lambda)(2k+2\lambda-2+1)\right]c_k = \left[4(k+\lambda-1)(k+\lambda-2+1)-1\right]c_{k-1}$$

$$\Rightarrow 2(k+\lambda)(2k+2\lambda-1)c_k = \left[4(k+\lambda-1)(k+\lambda-1)-1\right]c_{k-1}$$

$$\Rightarrow 2(k+\lambda)(2\lambda+2k-1)c_k = \left[(2k+2\lambda-2+1)(2k+2\lambda-2-1)\right]c_{k-1}$$

$$\Rightarrow 2(k+\lambda)c_k = (2k+2\lambda-3)c_{k-1} \quad ; \quad k \geq 1$$

من أجل الجذر الأول:

for $\lambda_1 = 0 \Rightarrow 2kc_k = (2k-3)c_{k-1}$

$$\Rightarrow c_k = \frac{2k-3}{2k}c_{k-1} \quad ; \quad k \geq 1$$

$k=1 \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{2}c_0$

$k=2 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{4}c_1$

$$k=3 \Rightarrow c_3 = \frac{3}{6} c_2$$

$$k=4 \Rightarrow c_4 = \frac{5}{8} c_3$$

$$k=5 \Rightarrow c_5 = \frac{7}{10} c_4$$

$$\vdots$$

$$\forall k = k \Rightarrow c_k = \frac{2k-3}{2k} c_{k-1} \quad , \quad k \geq 1$$

نضرب العلاقات طرفاً بطرف فنجد:

$$c_k = \frac{(-1)(1)(3)(5)(7)\cdots(2k-3)}{(2)(4)(6)(8)\cdots(2k)} c_0$$

$$c_k = \frac{(1)(3)(5)(7)\cdots(2k-3)}{2^k (1.2.3 \ldots k)} c_0$$

$$c_k = \frac{(2k-3)!}{2^k (k!) 2^{k-1} (k-1)!} c_0$$

وعندئذٍ يكون الحل الأول من أجل الجذر الأول $\lambda_1 = 0$:

$$w_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \xi^{k+\lambda_1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} - \frac{(2k-3)!}{2^{2k-1} (k!)(k-1)!} \xi^k \quad ; \quad c_0 = 1$$

For $\lambda_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow (2k+1) c_k = (2k-2) c_{k-1}$

$$\Rightarrow c_k = \frac{2k-2}{2k+1} c_{k-1} \quad ; \quad k \geq 1$$

$k=1 \Rightarrow c_1=0$

$k=2 \Rightarrow c_2=0$

$\vdots \qquad \vdots$

$\forall k=k \Rightarrow c_k=0$

ومنه يكون الحل الثاني:

$$w_2=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\lambda_2} = c_0 z^{1/2}+0+0=\sqrt{z}$$

ومن ثمّ الحل العام:

$$w= Aw_1+Bw_2$$

(تركيب خطي من الحلين w_1 و w_2)

7- مثال (6) صفحة 124:

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية:

$$z^2w''-z(1+z)\,w'+w=0$$

في جوار النقطة $z=0$

الحل:

$$w''-\frac{1+z}{z}w'+\frac{1}{z^2}w=0$$

$$z=0 \text{ نقطة شاذة منتظمة} \Leftarrow \begin{cases} z=0 \text{ قطب بسيط لـ } a(z) \\ z=0 \text{ قطب مضاعف لـ } b(z) \end{cases}$$

نكتب المعادلة الدليلية بالشكل:

$$\lambda(\lambda-1)+\lambda c_0+d_0=0$$

حيث:

$$a_1(z)=z\,a(z)=-(1+z) \Rightarrow a_1(0)=-1=c_0$$

$$b_1(z)=z^2\,b(z) \Rightarrow b_1(0)=d_0=1$$

$$\lambda(\lambda-1)-\lambda+1=\lambda^2-\lambda-\lambda+1=(\lambda-1)^2=0$$

$\lambda = 1$ جذر مضاعف (نفس أحكام الحالة الثانية).

نبحث عن حل من الشكل:

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\lambda}$$

بالاشتقاقات والتعويض نجد:

$$z^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+\lambda)(k+\lambda-1) c_k z^{k+\lambda-2} - (z+z^2) \sum_{k=0}^{\infty} (k+\lambda) c_k z^{k+\lambda-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\lambda} = 0$$

نفك الأقواس ونختصر على z^{λ}:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+\lambda)(k+\lambda-1) c_k z^{k} - \sum_{k=0}^{\infty} (k+\lambda) c_k z^{k} - \sum_{k=0}^{\infty} (k+\lambda) c_k z^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k} = 0$$

بالمطابقة:

$$z^0 : \lambda(\lambda-1) - \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \quad \text{(جذر مضاعف)}$$

$$z^k : (k+\lambda)(k+\lambda-1) c_k - (k+\lambda) c_k - (k+\lambda-1) c_{k-1} + c_k = 0$$

$$\Rightarrow \left[(k+\lambda)(k+\lambda-1) - (k+\lambda) + 1\right] c_k = (k+\lambda-1) c_{k-1} \quad ; k \geq 1$$

$$\left[(k+\lambda)(k+\lambda-1-1) + 1\right] C_k = (k+\lambda-1) c_{k-1} \quad ; k \geq 1$$

$$\Rightarrow \left[(k+1)(k-1) + 1\right] c_k = k\, c_{k-1} \quad ; k \geq 1$$

$$(k^2 - 1 + 1) c_k = k\, c_{k-1} \quad ; k \geq 1$$

$$c_k = \frac{1}{k} c_{k-1} \quad ; k \geq 1$$

/ /

$$k=1 \Rightarrow c_1 = c_0$$
$$k=2 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2} c_1$$
$$k=3 \Rightarrow c_3 = \frac{1}{3} c_2$$
$$\vdots$$
$$\forall k \Rightarrow c_k = \frac{1}{k} c_{k-1}$$

نضرب العلاقات ببعضها فنجد:

$$c_k = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k-1} \cdots \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot c_0$$
$$c_k = \frac{1}{k!} c_0 \quad ; \quad c_0 = 1$$

ومنه يكون الحل الأول:

$$w_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{k+1} = z e^{z}$$

ولإيجاد الحل الثاني نجري التحويل:

$$w = u \cdot w_1 \quad ; u_1 = u(z)$$

$$w' = u' w_1 + u \cdot w_1'$$
$$w'' = u'' w_1 + 2 u' w_1' + u w_1''$$

نعوض بالمعادلة المفروضة فنحصل على:

$$z^2 (u'' w_1 + 2u' w_1' + u w_1'') - z(1+z)(u' w_1 + u w_1') + u \cdot w_1 = 0$$

$$z^2 u'' w_1 + 2 z^2 u' w_1' + z^2 u w_1'' - z u' w_1 - z u w_1' - z u w_1' - z^2 u' w_1$$
$$- z^2 u \cdot w_1' + u w_1 = 0$$

$$z^2 u'' w_1 + (2z^2 w_1' - (z+z^2) w_1) u' + (z^2 w_1'' - z(1+z) w_1' + w) u = 0$$

$$z^2 u'' . w_1 = -2 z^2 w_1' u' + z w_1 u' + z^2 w_1 u'$$

$$\Rightarrow \frac{u''}{u'} = 1 + \frac{1}{z} - 2 \frac{w_1'}{w_1}$$

بالمكاملة:

$$\ln u' = A + z + \ln z - 2 \ln w_1 = A + z + \ln \frac{z}{w_1^2}$$

$$\Rightarrow u' = \frac{a}{c_0} e^{z} . \frac{z}{z^2 e^{2z}} = \frac{a}{c_0} z^{-1} e^{-z}$$

بالمكاملة نجد:

$$u = \frac{a}{c_0} \left(\ln z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(k!)} z^k \right) + B$$

وبالتعويض في عبارة w نحصل على الحل العام المطلوب.

8- مثال (10) صفحة 135:

ابحث في الحل العام للمعادلة:

$$(z^3 - z) w'' + (8 z^2 - 2) w' + 12 z w = 0$$

في جوار الصفر.

الحل:

نبحث عن حل من الشكل: $w = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\lambda}$

نضرب طرفي المعادلة المفروضة بـ z فنجد:

$$z(z^3 - z) w'' + z(8z^2 - 2) w' + 12 z^2 w = 0$$

بالاشتقاق والتعويض:

$$\Rightarrow (z^4 - z^2) \sum_{k=0}^{\infty} (k+\lambda)(k+\lambda-1) c_k z^{k+\lambda-2} + (8z^3 - 2z) \sum_{k=0}^{\infty} (k+\lambda).$$

$$c_k z^{k+\lambda-1} + 12\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\lambda+2} = 0$$

نقسم طرفي المعادلة الناتجة على z^{λ} فنجد

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k z^{k+2} - \sum_{k=0}^{\infty}(k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k z^{k}$$

$$+8\sum_{k=0}^{\infty}(k+\lambda)c_k z^{k+2} - 2\sum_{k=0}^{\infty}(k+\lambda)c_k z^{k} + 12\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^{k+2} = 0$$

بالمطابقة نجد:

$z^0: \quad -\lambda(\lambda-1)c_0 - 2\lambda c_0 = 0 \Rightarrow (-\lambda^2 + \lambda - 2\lambda) = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda+1) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \ \vee \ \lambda = -1$

$z^1: \quad -(\lambda+1)\lambda c_1 - 2(\lambda+1)c_1 = 0$

$\quad -(\lambda+1)(\lambda+2)c_1 = 0$

For $\lambda = -1 \Rightarrow 0 . c_1 = 0$ (c_1 ثابت اختياري)

$z^k: \quad (k+\lambda-2)(k+\lambda-3)c_{k-2} - (k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k$

$\quad + 8(k+\lambda-2)c_{k-2} - 2(k+\lambda)c_k + 12c_{k-2} = 0$

$\Rightarrow [(k+\lambda-2)(k+\lambda-3) + 8(k+\lambda-2) + 12]c_{k-2} = [(k+\lambda).$

$(k+\lambda-1) + 2(k+\lambda)]c_k$

$\Rightarrow [(k+\lambda-2)(k+\lambda+5) + 12]c_{k-2} = (k+\lambda)(k+\lambda+1)c_k$

For $\lambda = -1 \Rightarrow k(k+1)c_{k-2} = k(k-1)c_k \ , \ k \geq 2$

$k=2 \Rightarrow C_2 = 3C_0$

$k=3 \Rightarrow C_3 = 2C_0$

$k=4 \Rightarrow C_4 = \frac{20}{12} C_0$

$\vdots$

$\forall k \; ; \; C_k = \frac{k+1}{k-1} C_0$

ومنه:

$$w_1 = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^{k+1} = z^{-1}(C_0 + C_1 z + 3C_0 z^2 + 2C_0 z^3 + \cdots)$$

$$= C_1 + \frac{C_0}{z} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k+1}{k-1} C_0 z^{k-1}$$

نبدل $k \longrightarrow k+2$ في الطرف الأيمن فنجد:

$$= C_1 + \frac{C_0}{z} + C_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+3}{k+1} z^{k+1}$$

$$\Rightarrow w_1 = C_1 + C_0\left[\frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+3}{k+1} z^{k+1}\right]$$

9- مثال (12) صفحة 139:

ابحث في حل المعادلة التفاضلية

$$z(z+1)w'' + (z+5)w' - 4w = 0$$

في جوار الصفر.

الحل:

$$z^2(z+1)w'' + z(z+5)w' - 4zw = 0$$

/ /

$$\Rightarrow w'' + \frac{z(z+5)}{z^2(z+1)} w' - \frac{4z}{z^2(z+1)} w = 0$$

$$\Rightarrow w'' + \frac{z+5}{z(z+1)} w' - \frac{4}{z(z+1)} w = 0$$

$z=0$ قطب بسيط لـ $a(z)$
$z=0$ قطب بسيط لـ $b(z)$
$\Leftarrow$ $z=0$ نقطة شاذة منتظمة

نبحث عن حل من الشكل:

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\lambda} \quad ; \quad c_0 \neq 0$$

بالاشتقاق والتعويض:

$$(z^2+z^3)\sum_{k=0}^{\infty}(k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k z^{k+\lambda-2} + (z^2+5z)\sum_{k=0}^{\infty}(k+\lambda)\cdot c_k z^{k+\lambda-1} - 4z\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}(k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k z^{k+\lambda} + \sum_{k=0}^{\infty}(k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k z^{k+\lambda+1} + \sum_{k=0}^{\infty}(k+\lambda)c_k z^{k+\lambda+1} + 5\sum_{k=0}^{\infty}(k+\lambda)c_k z^{k+\lambda} - 4\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\lambda+1} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k z^{k} + \sum_{k=0}^{\infty}(k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k z^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty}(k+\lambda)c_k z^{k+1} + 5\sum_{k=0}^{\infty}(k+\lambda)c_k z^{k} - 4\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+1} = 0$$

z^0: $\lambda(\lambda-1)c_0 + 5\lambda c_0 = 0$

$$(\lambda^2 - \lambda + 5\lambda)c_0 = 0 \Rightarrow (\lambda^2 + 4\lambda)c_0 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda = 0$$

$\Rightarrow \lambda = 0 \quad \vee \quad \lambda = -4 \; ; \; (\lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{Z}$ (الحالة الثالثة)

$z^k : (k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k + (k+\lambda-1)(k+\lambda-2)c_{k-1} + (k+\lambda-1)c_{k-1}$
$+ 5(k+\lambda)c_k - 4c_{k-1} = 0$

$[(k+\lambda)(k+\lambda-1) + 5(k+\lambda)]c_k + [(k+\lambda-1)(k+\lambda-2) +$

$(k+\lambda-1) - 4]c_{k-1} = 0$

$[(k+\lambda)(k+\lambda-1) + 5]c_k + [(k+\lambda-1)(k+\lambda-1) - 4]c_{k-1} = 0$

$(k+\lambda)(k+\lambda+4)c_k + [(k+\lambda-1)^2 - 4]c_{k-1} = 0$

For $\lambda = -4 \Rightarrow k(k-4)c_k + (k-3)(k-7)c_{k-1} = 0$

$k=1 \Rightarrow -3c_1 + 12c_0 = 0 \Rightarrow c_1 = 4c_0$

$k=2 \Rightarrow -4c_2 + 5c_1 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{5}{4}c_1$

$k=3 \Rightarrow -3c_3 + 0c_2 = 0 \Rightarrow c_3 = 0$

$k=4 \Rightarrow 0.c_4 - 3c_3 = 0 \Rightarrow$ c_4 ثابت اختياري

$k=5 \Rightarrow 5c_5 - 4c_4 = 0 \Rightarrow c_5 = \frac{4}{5}c_4$

$k=6 \Rightarrow 12c_6 - 3c_5 = 0 \Rightarrow c_6 = \frac{1}{4}c_5$

$k=7 \Rightarrow 21c_7 + 0c_6 = 0 \Rightarrow c_7 = 0$

$K=8 \Rightarrow 32C_8 + 5C_7 = 0 \Rightarrow C_8 = 0$

$k=9 \Rightarrow 45C_9 + 12C_8 = 0 \Rightarrow C_9 = 0$

ومن ثم يكون الحل:

$$\omega_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\lambda} = z^{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = z^{-4}\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

$$= z^{-4}(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + c_5 z^5 + c_6 z^6 + c_7 z^7 + \cdots)$$

$$= z^{-4}(c_0 + 4c_0 z + c_0 z^2 + 0 + c_4 z^4 + \frac{4}{5}c_4 z^5 + \frac{1}{5}c_4 z^6 + 0 + \cdots)$$

$$= z^{-4}\left[(1+4z+5z^2)c_0 + (z^4 + \frac{4}{5}z^5 + \frac{1}{5}z^6)c_4\right]$$

$$= \left(\frac{1}{z^4} + \frac{4}{z^3} + \frac{5}{z^2}\right)c_0 + \left(1 + \frac{4}{5}z + \frac{1}{5}z^2\right)c_4$$

وهو يمثل الحل العام

١٥- تمرين (4) صفحة 167:

برهن صحة العلاقة التالية:

$$\frac{d}{dz}\left[z^{c-1}F(a,b,c,z)\right] = (c-1)\,z^{c-2}F(a,b,c-1,z)$$

الحل:

$$L_1 = \frac{d}{dz}\left(z^{c-1}\left(1 + \frac{a.b}{c}z + \frac{ab(a+1)(b+1)}{2c(c+1)}z^2 + \cdots\right)\right)$$

$$L_1 = \frac{d}{dz}\left[z^{c-1} + \frac{ab}{c}z^{c} + \frac{ab(a+1)(b+1)}{2c(c+1)}z^{c+1} + \cdots\right]$$

$$L_1 = (c-1)z^{c-2} + \frac{c.ab}{c} z^{c-1} + \frac{(c+1)(ab)(a+1)(b+1)}{2c(c+1)} z^{c}$$

$$+ (c+2)\frac{ab(a+1)(a+2)(b+1)(b+2)}{3.2\,c(c+1)(c+2)} z^{c+1} + \cdots$$

نخرج $(c-1)z^{c-2}$ عامل مشترك:

$$L_1 = (c-1)z^{c-2}\left[1 + \frac{ab}{c-1}z + \frac{ab(a+1)(b+1)}{2(c-1)c}z^2 + \cdots\right]$$

$$= (c-1)z^{c-2} F(a,b,c-1,z) = L_2$$

11- مثال (2) صفحة 181 :

إذا علمت أن:

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

فأثبت أن:

$$J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos(z)$$

الحل:

$$J_{-1/2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma\left(-\frac{1}{2}+k+1\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+2k}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{z}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, 2^k}{k!\,(2k-1)(2k-3)\cdots 3.1}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, 2^k\, (2k)(2k-2)\cdots 4.2}{k!\,(2k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, 2^{2k}\, k!}{k!\,(2k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, \cos(z)$$

12- أثبت أن:

$$J^2_{1/2}(z) + J^2_{-1/2}(z) = \frac{2}{\pi z}$$

الحل:

باستخدام المثال السابق نجد أن:

$$J^2_{1/2}(z) + J^2_{-1/2}(z) = \frac{2}{\pi z}\sin^2(z) + \frac{2}{\pi z}\cos^2(z)$$

$$= \frac{2}{\pi z}\left(\sin^2(z) + \cos^2(z)\right) = \frac{2}{\pi z}$$

13- مثال (6) صفحة 191: (سؤال دورة)

باستخدام العلاقتين:

$$(i)\ \frac{d}{dz}\left(z^n J_n\right) = z^n J_{n-1}$$

$$(ii)\ \frac{d}{dz}\left(z^{-n} J_n\right) = -z^{-n} J_{n+1}$$

أثبت أن:

$$\frac{d}{dz}\left(J_n^2 + J_{n+1}^2\right) = 2\left(\frac{n}{z} J_n^2 - \frac{n+1}{z} J_{n+1}^2\right)$$

الحل:

من (i) لدينا:

$$\frac{d}{dz}\left(z^{n} J_{n}\right) = z^{n} J_{n-1}$$

$$n z^{n-1} J_{n}(z) + z^{n} J_{n}'(z) = z^{n} J_{n-1}(z)$$

$$z^{n} J_{n}'(z) = z^{n} J_{n-1}(z) - n z^{n-1} J_{n}(z)$$

نقسم طرفي العلاقة على z^{n}:

$$J_{n}'(z) = J_{n-1}(z) - \frac{n}{z} J_{n}(z) \qquad (1)$$ للحفظ

نستخدم العلاقتان (1) و (2) في حل التمارين

من العلاقة (ii) لدينا:

$$\frac{d}{dz}\left(z^{-n} J_{n}\right) = -z^{-n} J_{n+1}$$

$$-n z^{-n-1} J_{n}(z) + z^{-n} J_{n}'(z) = -z^{-n} J_{n+1}(z)$$

$$z^{-n} J_{n}'(z) = n z^{-n-1} J_{n}(z) - z^{-n} J_{n+1}(z)$$

نقسم طرفي العلاقة على z^{-n}

$$J_{n}'(z) = \frac{n}{z} J_{n}(z) - J_{n+1}(z) \qquad (2)$$ للحفظ

بوضع $n+1$ بدلاً من n في العلاقة (1) نحصل على:

$$J_{n+1}'(z) = \frac{-(n+1)}{z} J_{n+1}(z) + J_{n}(z) \qquad (3)$$

وللبيان بطرف الأيسر في العلاقة المعطاة: بالاشتقاق

$$\frac{d}{dz}\left[J_n^2+J_{n+1}^2\right]=2J_nJ_n'+2J_{n+1}J_{n+1}'$$

بتعويض (1) و (2) نجد:

$$=2J_n\left[\frac{n}{z}J_n-J_{n+1}\right]+2J_{n+1}\left[-\frac{n+1}{z}J_{n+1}+J_n\right]$$

نبله الأقواس والاختصار نجد:

$$=2\left(\frac{n}{z}J_n^2-\frac{n+1}{z}J_{n+1}^2\right)$$

14_ مثال (7) صفحة 192:

باستخدام المعطيات (i)، (ii) في المثال السابق، أثبت أن:

$$\frac{d}{dz}\left[zJ_nJ_{n+1}\right]=z\left[J_n^2-J_{n+1}^2\right]$$

الحل: بالاشتقاق

$$\frac{d}{dz}\left[zJ_nJ_{n+1}\right]=J_nJ_{n+1}+z\left(J_n'J_{n+1}+J_nJ_{n+1}'\right)$$

$$=J_nJ_{n+1}+J_{n+1}\left(zJ_n'\right)+J_n\left(zJ_{n+1}'\right)\qquad(*)$$

بأسلوب مشابه للمثال السابق من العلاقتين (i) و (ii) نحصل على:

$$J_n'(z)=J_{n-1}(z)-\frac{n}{z}J_n(z)\qquad(1)$$

$$J_n'(z)=\frac{n}{z}J_n(z)-J_{n+1}(z)\qquad(2)$$

نضرب كلاً من طرفي العلاقتين (1) و (2) بـ z فنحصل على:

$$zJ_n'(z)=zJ_{n-1}(z)-nJ_n(z)\qquad(3)$$

$$z J_n'(z) = n J_n(z) - z J_{n+1}(z) \qquad (4)$$

بوضع $n+1$ بدلاً من n في (3) نحصل على:

$$z J_{n+1}'(z) = -(n+1) J_{n+1}(z) + z J_n(z) \qquad (5)$$

بتعويض (5) و (4) في $(*)$ نجد:

$$\frac{d}{dz}\left[z J_n J_{n+1}\right] = J_n J_{n+1} + J_{n+1}\left(n J_n - z J_{n+1}\right) + J_n\left(-(n+1) J_{n+1} + z J_n\right)$$

بعملية الاختصار نحصل على:

$$= z\left[J_n^2 - J_{n+1}^2\right]$$

15- مثال (8) صفحة 192:

إذا كان $n > -1$ أثبت أن:

$$\int_0^z z^{n+1} J_n(z)\, dz = z^{n+1} J_{n+1}(z)$$

الحل:

بما أن:

$$\frac{d}{dz}\left(z^n J_n(z)\right) = z^n J_{n-1}(z) \qquad (1)$$

بوضع $n+1$ بدلاً من n في (1) نحصل على:

$$\frac{d}{dz}\left(z^{n+1} J_{n+1}\right) = z^{n+1} J_n(z) \qquad (2)$$

بالتكامل من صفر إلى z نحصل على:

$$\int_0^z z^{n+1} J_n(z)\, dz = z^{n+1} J_{n+1}(z)$$

16. مثال (9) صفحة 193:
أثبت أن:

(i) $\frac{d}{dz}\left(z J_1(z)\right) = z J_0(z)$

(ii) $\int_0^b z J_0(az)\, dz = \frac{b}{a} J_1(ab)$

الحل:
من (i) نجد:

$$\frac{d}{dz}\left(z^n J_n(z)\right) = z^n J_{n-1}(z) \qquad (1)$$

بوضع n = 1 نحصل على:

$$\frac{d}{dz}\left(z J_1\right) = z J_0$$

بوضع $az = t$ أي $a\,dz = dt$ فنجد أن:

$$\int_0^b z J_0(az)\, dz = \frac{1}{a^2}\int_0^{ab} t J_0(t)\, dt$$

وباستخدام الجزء (1) نحصل على:

$$\int_0^b z J_0(az)\, dz = \frac{1}{a^2}\int_0^{ab} \frac{d}{dt}\left(t J_1\right) dt = \frac{1}{a^2}\left[t J_1\right]_0^{ab}$$

$$= \frac{1}{a^2}\left(ab\, J_1(ab) - 0\right)$$

$$\int_0^b z J_0(az)\, dz = \frac{b}{a} J_1(ab)$$

وحيث $J_1(0) = 0$

17) مثال (10) صفحة 194:
أثبت أن:

$$(i)\quad \frac{d}{dz}\left(J_0(z)\right) = -J_1(z)$$

$$(ii)\quad \int_a^b J_0 J_1 \, dz = \frac{1}{2}\left[J_0^2(a) - J_0^2(b)\right]$$

الحل:
الجزء (i) حيث إن:

$$\frac{d}{dz}\left(z^{-n} J_n(z)\right) = -z^{-n} J_{n+1}(z) \qquad (1)$$

بوضع $n=0$:

$$\frac{d}{dz}\left(J_0(z)\right) = -J_1(z) \qquad (2)$$

الجزء (ii) باستخدام المثال (14) نحصل على:

$$\int_a^b J_0(z) J_1(z)\, dz = -\int_a^b J_0(z) J_0'(z)\, dz$$

$$= \left[\frac{J_0^2(z)}{2}\right]_a^b = \frac{1}{2}\left[J_0^2(b) - J_0^2(a)\right]$$

18_ مثال (11) صفحة 195:
عبر عن $\int J_3(z)\, dz$ بدلالة $J_2(z)$, $J_1(z)$;
الحل:
باستخدام العلاقة:

$$\frac{d}{dz}\left(z^{-n} J_n(z)\right) = -z^{-n} J_{n+1}(z)$$

/ /

بالمكاملة نحصل على:

$$\int z^{-n} J_{n+1}(z) = -z^{-n} J_n(z) \qquad (1)$$

$$\int J_3(z)\,dz = \int z^2\left(z^{-2} J_3(z)\right) dz = z^2\left(-z^{-2} J_2(z)\right) - \int 2z\left(-z^{-2} J_2(z)\right) dz$$

بالتكامل بالتجزئة وباستخدام (1) ، $n = 2$ نحصل على:

$$\int J_3(z)\,dz = -J_2(z) + \int z^{-1} J_2(z)\,dz = -J_2(z) + 2\left(-z^{-1}\right) J_1(z) + c$$

ومن العلاقة التكرارية:

$$\frac{2n}{z} J_n(z) = J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) \qquad (3)$$

بوضع $n=1$ نحصل على:

$$\frac{2}{z} J_1(z) = J_0(z) + J_2(z)$$

$$J_2(z) = \frac{2J_1(z)}{z} - J_0(z) \qquad (4)$$

باستخدام (4) في (2) نجد أن:

$$\int J_3(z)\,dz = -\left(\frac{2J_1(z)}{z} - J_0(z)\right) - 2\,\frac{J_2(z)}{z} + c$$

$$= J_0(z) - \frac{4J_1(z)}{z} + c$$

حيث c ثابت اختياري

/ /

19- مثال (12) صفحة 196:
أثبت أن:

a) $\cos(z\sin\theta) = J_0(z) + 2J_2(z)\cos 2\theta + 2J_4(z)\cos 4\theta + \cdots$

b) $\sin(z\sin\theta) = 2J_1(z)\sin\theta + 2J_3(z)\sin 3\theta + 2J_5(z)\sin 5\theta + \cdots$

الحل:
نفرض أن: $t = e^{i\theta}$ وبالتعويض في الدالة المولدة نحصل على:

$$e^{\frac{1}{2}z(e^{i\theta}-e^{-i\theta})} = e^{iz\sin\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\, e^{in\theta}$$

$$\cos(z\sin\theta) + i\sin(z\sin\theta) = \{J_0(z) + [J_{-1}(z) + J_1(z)]\cos\theta + [J_{-2}(z) + J_2(z)]\cos 2\theta + \cdots\} + i\{(J_1(z) - J_{-1}(z))\sin\theta + (J_2(z) - J_{-2}(z))\sin 2\theta + \cdots\}$$

وحيث أن $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$ فنحصل على:

$$\cos(z\sin\theta) + i\sin(z\sin\theta) = \{J_0(z) + 2J_2(z)\cos 2\theta + \cdots\} + i\{2J_1(z)\sin\theta + 2J_3(z)\sin 3\theta + \cdots\}$$

وبمساواة الجزء الحقيقي والجزء التخيلي ينتج المطلوب.

20- مثال (13) صفحة 196 :

برهن صحة العلاقة :

$$16 J_\nu''''(z) = J_{\nu-4}(z) - 4J_{\nu-2}(z) + 6J_\nu(z) - 4J_{\nu+2}(z) + J_{\nu+4}(z)$$

حيث ν ثابت كيفي.

الحل:

we have: $2J_\nu'(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)$

$$\Rightarrow 2J_\nu''(z) = J_{\nu-1}'(z) - J_{\nu+1}'(z)$$

$$\Rightarrow 4J_\nu''(z) = 2J_{\nu-1}'(z) - 2J_{\nu+1}'(z)$$

$$\Rightarrow 4J_\nu''(z) = J_{\nu-2}(z) - J_\nu(z) - J_\nu(z) + J_{\nu+2}(z)$$

$$= J_{\nu-2}(z) - 2J_\nu(z) + J_{\nu+2}(z)$$

نشتق فنجد:

$$\Rightarrow 4J_\nu'''(z) = J_{\nu-2}'(z) - 2J_\nu'(z) + J_{\nu+2}'(z)$$

$$\Rightarrow 8J_\nu'''(z) = 2J_{\nu-2}'(z) - 4J_\nu'(z) + 2J_{\nu+2}'(z)$$

$$\Rightarrow 8J_\nu'''(z) = J_{\nu-3}(z) - J_{\nu-1}(z) - 2J_{\nu-1}(z) + 2J_{\nu+1}(z) + J_{\nu+1}(z) - J_{\nu+3}(z)$$

$$= J_{\nu-3}(z) - 3J_{\nu-1}(z) + 3J_{\nu+1}(z) - J_{\nu+3}(z)$$

نشتق طرفي المعادلة الأخيرة ونضرب بـ (2) :

$$16\,J'''_{\nu}(z) = 2J'_{\nu-3}(z) - 3(2)\,J'_{\nu-1}(z) + 3(2)\,J'_{\nu+1}(z) - 2J'_{\nu+3}(z)$$

$$= J_{\nu-4}(z) - J_{\nu-2}(z) - 3J_{\nu-2}(z) + 3J_{\nu}(z) + 3J_{\nu}(z)$$

$$-3J_{\nu+2}(z) - J_{\nu+2}(z) + J_{\nu+4}(z)$$

$$= J_{\nu-4}(z) - 4J_{\nu-2}(z) + 6J_{\nu}(z) - 4J_{\nu+2}(z) + 3J_{\nu+4}(z)$$

21_ مثال (14) صفحة 197:

برهن أنه إذا كان m عدداً صحيحاً موجباً فإن:

$$\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^{m}\left[z^{\nu} J_{\nu}(z)\right] = z^{\nu-m} J_{\nu-m}(z)$$

الحل:

نبرهن باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي:

$$m=0 \Rightarrow z\,J_{\nu}(z) = z\,J_{\nu}(z)$$

نفرض صحتها من أجل m ثم نبرهن صحتها لأجل $m+1$:

$$\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^{m+1}\left[z^{\nu} J_{\nu}(z)\right] = \frac{d}{z\,dz}\left[\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^{m}\left(z^{\nu} J_{\nu}(z)\right)\right]$$

$$\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^{m+1}\left[z^{\nu} J_{\nu}(z)\right] = \frac{d}{z\,dz}\left[z^{\nu-m} J_{\nu-m}(z)\right]$$

$$= \frac{1}{z}\,\frac{d}{dz}\left[z^{\nu-m} J_{\nu-m}(z)\right]$$

$$\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^{m+1}\left[z^{\nu} J_{\nu}(z)\right] = \frac{1}{z}\left[(\nu-m) z^{\nu-m-1} J_{\nu-m}(z) + z^{\nu-m} J'_{\nu-m}(z)\right]$$

$$= (\nu-m) z^{\nu-m-2} J_{\nu-m}(z) + z^{\nu-m-1} J'_{\nu-m}(z)$$

but: $J'_{\nu}(z) = J_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} J_{\nu}(z)$

$$J'_{\nu-m}(z) = J_{\nu-m-1}(z) - \frac{\nu-m}{z} J_{\nu-m}(z)$$

نعوض عنه:

$$\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^{m+1}\left[z^{\nu} J_{\nu}(z)\right] = (\nu-m) z^{\nu-m-2} J_{\nu-m}(z) + z^{\nu-m-1}\left[J_{\nu-m-1}(z) - \frac{\nu-m}{z} J_{\nu-m}(z)\right]$$

$$= (\nu-m) z^{\nu-m-2} J_{\nu-m}(z) + z^{\nu-m-1} J_{\nu-m-1}(z) - (\nu-m) z^{\nu-m-2} J_{\nu-m}(z)$$

$$= z^{\nu-m-1} J_{\nu-m-1}(z)$$

22 مثال (15) صفحة 199:

برهن صحة العلاقة التالية:

$$J_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\frac{\sin z}{z} - \cos z\right)$$

الحل:

سنبرهن صحة هذه العلاقة بطريقة مغايرة تماماً لما برهناه سابقاً:

/ /

نعلم أن:

$$J_{3/2}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{3/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{n!\,\Gamma(n+5/2)}$$

لكن:

$$\Gamma\left(n+\frac{5}{2}\right) = \left(n+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right) = \frac{(n+3/2)(2n+1)!}{2^{n+1}\cdot 2^{n}\cdot n!}\sqrt{\pi}$$

ومنه:

$$\Gamma\left(n+\frac{5}{2}\right) = \frac{(2n+3)!}{4^{n+1}(2n+2)\,n!}\sqrt{\pi}$$

كما أن:

$$\frac{(-1)^n (z^2/4)^n}{n!\,\dfrac{(2n+3)!}{4^{n+1}(2n+2)n!}\sqrt{\pi}} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{(-1)^n(2n+2)}{(2n+3)!} z^{2n}$$

ومن ثمة:

$$J_{3/2}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{3/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{(-1)^n(2n+2)}{(2n+3)!} z^{2n}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, z^{3/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+2)}{(2n+3)!} z^{2n}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+2)}{(2n+3)!} z^{2n+2}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{n-1=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(+2n)}{(2n+1)!} z^{2n}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(+2n-1+1)}{(2n+1)!}z^{2n}\right]$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}+1+\frac{1}{z}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)-1\right]$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\frac{\sin z}{z}-\cos z\right)$$

23- مثال (2) صفحة 211:

أوجد قيمة التكامل:

$$\int_{-1}^{1} z^4 P_3(z)\,dz$$

الحل:

$$\int_{-1}^{1} z^4 P_3(z)\,dz=0$$

لأن $P_3(z)$ دالة فردية.

24- مثال (1) صفحة 214:

باستخدام العلاقات التكرارية، أوجد $P_3(z)$ ، $P_2(z)$ ، مع العلم أن:

$$P_0(z)=1\quad,\quad P_1(z)=z$$

الحل:

من العلاقة (1) نرى أن:

$$P_{n+1}=\frac{2n+1}{n+1}zP_n-\frac{n}{n+1}P_{n-1}$$

نضع $n=1$ فنحصل على:

$$P_2 = \frac{3}{2} z P_1 - \frac{1}{2} P_0 = \frac{1}{2}(3z^2 - 1)$$

نضع $n=2$ فنحصل على:

$$P_3 = \frac{5}{3} z P_2 - \frac{2}{3} P_1 = \frac{5}{3} z \frac{1}{2}(3z^2 - 1) - \frac{2}{3} z$$

$$P_3 = \frac{5}{2} z^3 - \frac{5}{6} z - \frac{2}{3} z$$

$$= \frac{5}{2} z^3 - \frac{3}{2} z = \frac{1}{2}(5z^3 - 3z)$$

25- مثال (4) صفحة 217:

أثبت أن:

$$\int_{-1}^{1} z P_n(z) P_{n-1}(z)\, dz = \frac{2n}{4n^2 - 1}$$

الحل:

من العلاقة:

$$P_{n+1}(z) = \frac{2n+1}{n+1} z P_n(z) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(z)$$

نجد أن:

$$z P_n(z) = \frac{n+1}{2n+1} P_{n+1}(z) + \frac{n}{2n+1} P_{n-1}(z)$$

بالتعويض في الدالة المكاملة:

$$I = \int_{-1}^{1} \left[\frac{n+1}{2n+1} P_{n+1}(z) P_{n-1}(z) + \frac{n}{2n+1} P_{n-1}^2(z) \right] dz$$

ومن خاصية التعامد نرى أن:

$$I = \frac{n}{2n+1} \int_{-1}^{1} P_{n-1}^2(z)\, dz = \frac{n}{(2n+1)} \frac{2}{[2(n-1)+1]} = \frac{2n}{4n^2 - 1}$$

/ /

26- مثال (5) صفحة 217:

أوجد قيمة التكامل الآتي:

$$\int_{-1}^{1} z^2 P_n(z)\, dz$$

الحل:

نعلم أن:

$$P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1)$$

أي أن:

$$z^2 = \frac{2}{3} P_2(z) + \frac{1}{3} P_0(z)$$

وعلى ذلك فإن:

$$I = \int_{-1}^{1} \left[\frac{2}{3} P_2(z) + \frac{1}{3} P_0(z) \right] P_n(z)\, dz$$

$$= \frac{2}{3} \int_{-1}^{1} P_2(z) P_n(z)\, dz + \frac{1}{3} \int_{-1}^{1} P_0(z) P_n(z)\, dz$$

$$= \begin{cases} 0 & n \neq 2,\ n \neq 0 \\ \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3} & n = 0 \\ \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15} & n = 2 \end{cases}$$

27) مثال (10) صفحة 221:

برهن أن:

$$\int_{0}^{1} P_n(z) P_m(z)\, dz = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad m \neq n \\ \frac{1}{1+2n} & \text{if} \quad m = n \end{cases}$$

where $m \neq n$ and $m - n$ زوجياً

/ /

الحل:

نعلم أن:

$$P_n(-z) = (-1)^n P_n(z)$$

$$P_m(-z) = (-1)^m P_m(z)$$

ومنه:

$$P_n(-z) \cdot P_m(-z) = (-1)^{n+m} P_n(z)\, P_m(z)$$

but: $m - n = 2k \Rightarrow m = n + 2k$

$$P_n(-z) \cdot P_m(-z) = (-1)^{n+2k+n} P_n(z) \cdot P_m(z) = P_n(z) \cdot P_m(z)$$

الدالة زوجية برهاناً، هذا من جهة ومن جهة ثانية لدينا:

$$\Rightarrow \int_{-1}^{+1} P_n(z) \cdot P_m(z)\, dz = 2\int_{0}^{1} P_n(z)\, P_m(z)\, dz = 0$$

where; $m = n \Rightarrow P_n(-z) \cdot P_n(-z) = (-1)^{n+n} P_n(z)\, P_n(z)$

$$= \left[P_n(z)\right]^2$$

دالة زوجية

$$\Rightarrow \int_{-1}^{+1} \left[P_n(z)\right]^2 dz = \frac{2}{1+2n}$$

$$\int_{-1}^{+1} \left[P_n(z)\right]^2 dz = 2\int_{0}^{1} \left[P_n(z)\right]^2 dz$$

$$\Rightarrow \int_0^1 [P_n(z)]^2 dz = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} [P_n(z)]^2 dz$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1+2n} = \frac{1}{1+2n}$$

28- مثال (11) صفحة 222 :

إذا كان R يشير إلى المؤثر

$$R = \frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\frac{d}{dz}\right]$$

برهن أن:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(z) R[f(z)] dz = -n(n+1)\int_{-1}^{+1} P_n(z) f(z) dz$$

وذلك بفرض أن f و f' يبقيان منتهيان عند ± 1.

الحل:

$$I = \int_{-1}^{+1} P_n(z) \frac{d}{dz}\left[(1-z^2) f'(z)\right] dz$$

$$= \int_{-1}^{+1} P_n(z)\left[(1-z^2) f''(z) - 2z f'(z)\right] dz$$

$$I = \int_{-1}^{+1} P_n(z)(1-z^2) f''(z) dz - 2\int_{-1}^{+1} z P_n(z) f'(z) dz$$

$$= I_1 + I_2$$

تكامل I_1 بالتجزئة:

$$f''(z)\, dz = dv \Rightarrow v = f'(z)$$

$$P_n(z)(1-z^2) = u \Rightarrow du = [(1-z^2) P_n(z)]'$$

ومنه:

$$I_1 = \int_{-1}^{+1} P_n(\zeta)(1-\zeta^2) f''(\zeta)\, d\zeta$$

$$= \Big[(1-\zeta^2) P_n(\zeta) f'(\zeta)\Big]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} \Big[(1-\zeta^2) P_n(\zeta)\Big]' f'(\zeta)\, d\zeta$$

$$= -\int_{-1}^{+1} (1-\zeta^2) P_n'(\zeta) f'(\zeta)\, d\zeta + 2\int_{-1}^{+1} \zeta P_n(\zeta) f'(\zeta)\, d\zeta$$

$$I = I_1 + I_2 = -\int_{-1}^{+1} (1-\zeta^2) P_n'(\zeta) f'(\zeta)\, d\zeta + 2\int_{-1}^{+1} \zeta P_n(\zeta) f'(\zeta)\, d\zeta$$
$$- 2\int_{-1}^{+1} \zeta P_n(\zeta) f'(\zeta)\, d\zeta$$

$$I = -\int_{-1}^{+1} (1-\zeta^2) P_n'(\zeta) f'(\zeta)\, d\zeta$$

$$f'(\zeta)\, d\zeta = dv \Rightarrow v = f(\zeta) \quad ; \quad (1-\zeta^2) P_n'(\zeta) = u \Rightarrow du = \Big[(1-\zeta^2) P_n'(\zeta)\Big]'$$

$$I = \Big[-(1-\zeta^2) P_n'(\zeta) \cdot f(\zeta)\Big]_{-1}^{+1} + \int_{-1}^{+1} \Big[(1-\zeta^2) P_n'(\zeta)\Big]' f(\zeta)\, d\zeta$$

$$= \int_{-1}^{+1} (1-\zeta^2) P_n''(\zeta) f(\zeta)\, d\zeta - 2\int_{-1}^{+1} \zeta P_n'(\zeta) f(\zeta)\, d\zeta$$

$$= \int_{-1}^{+1} \Big[(1-\zeta^2) P_n''(\zeta) - 2\zeta P_n'(\zeta)\Big] f(\zeta)\, d\zeta$$

$$= -n(n+1)\int_{-1}^{1} P_n(z)\, f(z)\, dz$$

انتهت التمارين المحلولة بعون الله تعالى.

بالتوفيق والتفوق للجميع ...

وأسأل الله أن أكون قد وُفقتُ في هذا العمل وأن يكون

خالصاً لوجهه ...

ملاحظة: التمارين غير المحلولة مطلوبة أيضاً ولكن بإذن الله هذه التمارين شاملة.