الموضوع: .... / /

اثبات العكس:

$$\boxed{x \in (M_1 \cap M_2) + M_3} \Rightarrow x = n + m_3$$

حيث $n \in M_1 \cap M_2$

$m_3 \in M_3$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \underbrace{n}_{\in M_1} + \underbrace{m_3}_{\in M_3 \subset M_1} \in M_1 \\ \\ x = \underbrace{n}_{\in M_2} + \underbrace{m_3}_{\in M_3} \in M_2 + M_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{x \in M_1 \cap (M_2 + M_3)}$$

ومنه $(M_1 \cap M_2) + M_3 \subseteq M_1 \cap (M_2 + M_3)$ (2

من 1 و 2 نستنتج أن العبارة صحيحة

المحاضرة الرابعة

التشاكلات الموديولية: (morphisms)

تعريف: ليكن M و N موديولين على نفس الحلقة A

عندها نقول عن التطبيق: $f : M \to N$

إنه تشاكل موديولي إذا:

1) $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$

2) $f(\alpha \cdot m_1) = \alpha \cdot f(m_1)$

مهما يكن $m_1, m_2 \in M$ و $\alpha \in A$

تعريف: ليكن N و M موديولين على حلقة A

$\mathrm{Hom}_A(M, N) = \{ f : M \to N$ تشاكل موديولي $\}$ مجموعة كل التشاكلات من M إلى N

نريد إثبات أن + قانون تشكيل داخلي و (.) قانون تشكيل خارجي

نعرف على هذه المجموعة قانون تشكيل داخلي:

$$f, g \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$$

$$f+g : M \to N$$

$$x \to (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

لإثبات أنه قانون تشكيل داخلي

$$f+g \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$$

لأن:

$$(f+g)(x+y) = f(x+y) + g(x+y) \quad (1$$

$$x, y \in M \quad = f(x) + f(y) + g(x) + g(y)$$

$$= f(x) + g(x) + f(y) + g(y)$$

$$= (f+g)(x) + (f+g)(y)$$

الثانية واضحة $(f+g)(\lambda x) = \lambda (f+g)(x) \quad (2$

لنعرف قانون تشكيل خارجي على هذه المجموعة (مجموعة مؤثرات A)

$$\forall \alpha \in A, \ \forall f \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$$

$$\alpha . f : M \to N$$

$$m \to (\alpha . f)(m) = \alpha \underset{N}{.} f(m)$$

$$\alpha . f \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$$

الشرط الأول واضح

الشرط الثاني

لأن: 2) $\forall \lambda \in A, \ \forall x \in M$

أي $(\alpha . f)(\lambda x) \overset{?}{=} \lambda (\alpha f)(x)$

$$(\alpha . f)(\lambda . x) = \alpha . (f(\lambda x))$$

تشاكل

((يجب أن تكون A تبديلية لكي يكون تشاكل مودولي))

(٥) تبديلي

الموضوع:

(A تبديلية) $= \alpha \cdot \lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot \alpha \cdot f(x)$

لا يصلح إلا إذا كانت A تبديلية

$= \lambda \cdot (\alpha \cdot f)(x)$

نتيجة: إذا كانت A حلقة مع المعطيات السابقة (Hom، M, N مودوليات على A)

فإن $(Hom_A(M,N),+,\circ)$ مودول على A

والإثبات واضح (مثل تمرين سابق)

الصورة المباشرة والصورة العكسية:

ليكن $f: M \to N$ تشاكل مودولي

M و N مودوليين على الحلقة A

ولتكن X مودول جزئي من M

و Y " " " N

عندها: $\vec{f}(X) = \{f(x) : x \in X\}$

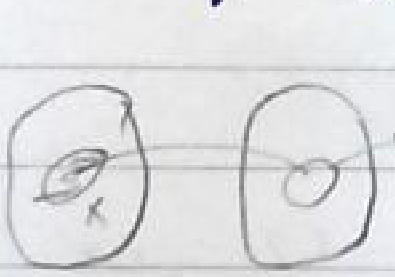
الصورة المباشرة لـ X وفق f

ونرمز لـ $\vec{f}(M) = Im f$

المستقر الفعلي لـ f

السهم بالعكس $\overleftarrow{f}(Y) = \{m \in M : f(m) \in Y\}$

الصورة العكسية لـ Y وفق f



$\vec{f}(X)$

وندعو $\overleftarrow{f}(0) = Ker f$

M N

نواة التشاكل f

مبرهنة: ليكن M, N موديولين على A و $f: M \to N$
تشاكل موديولي وليكن X موديول جزئي من M
و Y موديول جزئي من N
عندها: $\vec{f}(X)$ هي موديول جزئي من N و $\overleftarrow{f}(Y)$ هي
موديول جزئي من M

حالة خاصة: $Im f$ موديول جزئي من N و $ker f$ موديول
جزئي من M

الحل: 1) $\vec{f}(X) \neq \emptyset$ لأن $0 = f(0) \in \vec{f}(X)$ لأن f تشاكل
موديولي (زمرة + تحقق الشرط)

$$\forall \alpha, \beta \in A \quad , \quad \forall x, y \in \vec{f}(X)$$

عندها:

$$\exists z_1 \in X \quad : \quad x = f(z_1)$$
$$\exists z_2 \in X \quad : \quad y = f(z_2)$$

$$\alpha x + \beta y = \alpha . f(z_1) + \beta f(z_2)$$
$$= f(\underbrace{\alpha z_1 + \beta z_2}_{\in X})$$

إذاً $\alpha x + \beta y \in \vec{f}(X)$

2) $\overleftarrow{f}(Y) \neq \emptyset$ لأن $0 \in \overleftarrow{f}(Y)$

ليكن $x, y \in \overleftarrow{f}(Y)$ و $\alpha, \beta \in A$ ومنه

$f(x) \in Y$ و $f(y) \in Y$

$\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y) \in Y$

ومنه $f(\alpha x + \beta y) \in Y$

$\alpha x + \beta y \in \overleftarrow{f}(Y)$ مودول جزئي

من المنطلق

ملاحظة: إذا كان $f : M \to N$ تشاكل

مودولي وتقابل عندها يدعى f تماثل ونكتب $M \cong N$

مبرهنة: ليكن $f : M \to N$

تشاكل مودولي وليكن M_1 مودول جزئي من M

و N_1 مودول جزئي من N

عندئذ:

1) $\overleftarrow{f}(\overrightarrow{f}(M_1)) = M_1 + \ker f$

2) $\overrightarrow{f}(\overleftarrow{f}(N_1)) = N_1 \cap \operatorname{Im} f$

البرهان: 1]

$x \in \overleftarrow{f}(\overrightarrow{f}(M_1))$

$\Rightarrow f(x) \in \overrightarrow{f}(M_1)$

$\Rightarrow \exists m_1 \in M_1 \ . \ f(x) = f(m_1)$

$\Rightarrow \exists m_1 \in M_1 : f(x - m_1) = 0$

$\Rightarrow x - m_1 \in \ker f$

$\rightarrow x - m_1 = n \; ; \; n \in \ker f$

$\Rightarrow x = m_1 + n \in M_1 + \ker f$

العكس:

$x \in M_1 + \ker f \Rightarrow \exists m_1 \in M_1 \; ; n_1 \in \ker f$

$\boxed{x = m_1 + n_1}$

$n_1 \in \ker$ لأن $= 0$

$f(x) = f(m_1) + f(n_1) = f(m_1) \in \overrightarrow{f}(M_1)$

$\Rightarrow f(x) \in \overrightarrow{f}(M_1) \Rightarrow x \in \overleftarrow{f}(\overrightarrow{f}(M_1))$

[2. $y \in \overrightarrow{f}(\overleftarrow{f}(N_1))$

$\Rightarrow \exists x \in \overleftarrow{f}(N_1) : y = f(x)$

لدينا:

$y = f(x) \in \operatorname{Im} f$

و

$x \in \overleftarrow{f}(N_1) \Rightarrow f(x) \in N_1$

$y \in N_1 \cap \operatorname{Im} f$

العكس:

$x \in N_1 \cap \operatorname{Im} f$

$x \in N_1 \; , \exists y \in M$ ومنه:

$x = f(y)$ بأن

$x = f(y) \; ; \; x \in N_1$

$x = f(y) \in N_1$ ومنه

$\Rightarrow y \in \overleftarrow{f}(N)$

$\Rightarrow f(y) \in \overrightarrow{f}(\overleftarrow{f}(N_1)) \Rightarrow x \in \overrightarrow{f}(\overleftarrow{f}(N_1))$