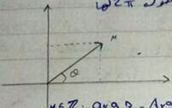
المحاضرة الرابعة - الرياضيات

2015 / 10 / 19

نتذكر من المحاضرة السابقة $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$



θ. لها عدد غير منته من القياسات، لكن في مجال طوله 2π لها قياس واحد

جميع القياسات نرمز لها بـ $\arg z$ ولكن هناك قياس الموجود بين $]-\pi, +\pi]$ ونرمز له بـ $\operatorname{Arg} z$

وهو الصيغة الرئيسية لزاوية z حيث أن $\arg z = \operatorname{Arg} z + 2\pi k \; ; \; k \in \mathbb{Z}$

$-\pi < \operatorname{Arg} z < +\pi$.

العلاقة بين الشكل المثلثي والإحداثيات العطلية $x = r\cos\theta, \; y = r\sin\theta$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{x}{r}, \; \sin\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow \tan\theta = \frac{y}{x}$

ولإيجاد الشكل المثلثي

$z = x + iy = r[\cos\theta + i\sin\theta] = [r, \theta] = r\,\mathrm{cis}\,\theta$.

ولدينا شكل آخر وهو

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ علاقة أولر

هنا مبدئياً رمز وليس عدد أسي لأن عندما درسنا العدد الأسي وهنا الأسي، إنه عدد حقيقي ولكن لاحقاً سنثبت إنه موجود...

$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

وهذه الشكل الأسي للعدد العقدي هو $\boxed{z = re^{i\theta}}$

ملاحظة: يجب تعيين الشكل المثلثي لعدد عقدي هو تعيين r و θ وكذلك الشكل الأسي

أمثلة عين الشكل القطبي الكامل من الأعداد التالية

① $z = 3$

طويلة العدد الحقيقي الموجب هي القيمة المطلقة له

$r = |z| = 3$

$\theta = 0°;\ Arg\, z = 0°$

$\Rightarrow z = 3\, cis\, 0$

② $z = -5$

$r = |z| = 5$

ممكن أن نستبدل أن الطويلة هي بعده عن المبدأ

$\Rightarrow Arg\, z = \pi$

لو مشينا بالعكس سيعطي لنا الزاوية $-\pi$ لكنه لا ينتمي الى المجال $]-\pi, \pi]$ ولكن نريد القيمة الرئيسة

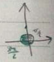
$\Rightarrow z = 5\, cis\, \pi$

الأسي $z = 5e^{i\pi}$

③ $z = 2i$

$r = |2i| = |2|.|i| = 2$

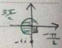
$Arg\, z = \frac{\pi}{2}$



④ $z = -4i$

$r = |-4i| = 4$

$Arg(-4i) = -\frac{\pi}{2}$



$\Rightarrow z = -4i = 4\, cis(-\frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow -4i = 4e^{-i\pi/2}$

$i = -e^{-i\pi/2}$

في التمارين السابقة ممكن أن نأخذ نحن زاوية مخالفة لكننا نريد القيمة الرئيسة

نتائج

- الزاوية لعدد حقيقي بحت موجب هي 0
- " " " " سالب هي π
- " " تخيلي " موجب هي $\frac{\pi}{2}$
- " " " " سالب هي $\frac{-\pi}{2}$

⑤ $z = 1 + i\sqrt{3}$

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

لا ننسى الـ i ولا ندخلها بالطويلة لأن الطويلة عدد حقيقي وليس عقدي

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow Arg(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$

$|1 + i\sqrt{3}| = 2\, cis\, \frac{\pi}{3}$

$= [2, \frac{\pi}{3}]$

والشكل الأسي $= 2e^{i\pi/3}$

طريقة أخرى لإيجاد الزاوية (tan):

بمثال جديد

⑥ $z = -1 - i\sqrt{3}$

$r = 2$

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

العدد يقع بالربع الثالث وضوحاً لكن $\frac{\pi}{3}$ تقع في الربع الأول وللانتقال من الربع الأول الى الربع الثالث إما أن نضيف أو نطرح π بحيث لا نخرج من المجال $]-\pi, \pi]$

$\Rightarrow \frac{\pi}{3} - \pi = \frac{-2\pi}{3}$

$\Rightarrow z = 2\,\mathrm{cis}\left(\frac{-2\pi}{3}\right)$

ملاحظة: للانتقال من ربع الى ربع إما أن نضيف أو نطرح π لكن اذا خرجنا عن المجال نضيف أو نطرح 2π

⊕ خواص العدد العقدي $\mathrm{cis}\,\theta$:

① $|\mathrm{cis}\,\theta| = 1 \; ; \forall \theta \in \mathbb{R}.$

② $\mathrm{cis}(2\pi k) = 1 \; ; \forall k \in \mathbb{Z}$

نفس الكلام يتحقق لـ $re^{i\theta}$

③ $\mathrm{cis}\,\theta_1 \cdot \mathrm{cis}\,\theta_2 = \mathrm{cis}(\theta_1 + \theta_2)$

• $e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

$\forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$

أو بصيغة ...

$\Rightarrow z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\, \mathrm{cis}(\theta_1 + \theta_2)$

$\Rightarrow z^n = r^n\, \mathrm{cis}(n\theta)$ — ④

وتعمم الى الأعداد الصحيحة أيضاً $n \in \mathbb{N}$

مثال: أوجد العدد العقدي التالي $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{100}$ بالشكل الجبري

ملاحظة: 1

• $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\, \mathrm{cis}(\theta_1 - \theta_2) \quad r_2 \neq 0$

• $\overline{\mathrm{cis}\,\theta} = \mathrm{cis}(-\theta) = (\mathrm{cis}\,\theta)^{-1}$

بالعودة الى التمرين

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{100} = \left(\frac{2\,\mathrm{cis}\,\frac{\pi}{3}}{\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,\frac{\pi}{4}}\right)^{100}$$

$$= \left(\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right)^{100}$$ — بالاستفادة من ④

$$= (4)^{25} \cdot \mathrm{cis}\left(\frac{100\pi}{12}\right)$$

$$= 4 \cdot (16)^{12} \cdot \mathrm{cis}\left(\frac{25\pi}{3}\right)$$

$$= 4 \cdot 16^{12} \cdot \mathrm{cis}\left(8\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

وصلنا الى شكل مثالي للعدد العقدي لكنه بالضبط نريد الشكل الجبري.

$$= 4 \cdot (16)^{12} \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right]$$

$$= 4 \cdot (16)^{12} \left[\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

هذا الشكل الجبري (الديكارتي)

ملاحظة هامة

إذا لم تكن البسط ذو زاوية شهيرة والمقام أيضا زاوية غير شهيرة، نقوم بضرب البسط والمقام بمرافق المقام ثم نحسب حاصل القسمة وبذا تصبح الزوايا شهيرة في هذه الحالة.

انتهت المحاضرة

عمر الدوري