$$C^{n}_{n_1,\dots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}$$

مثال: إن عدد طرائق اختيار ثلاثة كتب من $\boxed{7}$ كتب لترتيبها على رف هو

$$C^7_3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7\times6\times5}{(3)(2)(1)!} = \boxed{35}$$ طريقة

مثال: بكم طريقة يمكن اختيار ثلاث طالبات من مجموعة فيها 5 طالبات؟

$$C^5_3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1\times2\times1} = \boxed{10}$$ طرق

ارتحت

20/10/2015   4   المحاضرة /5/

تمرين: يوجد في صف سبعة طلاب وخمس طالبات والمطلوب:

أ) ما عدد الطرائق التي يمكن أن نختار بها المدرس لجنة مكونة من أربعة من هذا الصف.

ب) بكم طريقة يمكن أن تتكون في اللجنة طالبة وثلاثة طلاب، وما احتمال ذلك

ج) بكم طريقة يمكن تكون في اللجنة طلاب، وما احتمال ذلك.

د) " " " " طالبة واحدة على الأقل وما احتمال ذلك

هـ) " " يوجد " طالب واحد على الأكثر " "

و) تكون اللجنة من جنس واحد (إما طالبات أو طلاب) وما احتمال ذلك

/ /

الحل [P] نفرض Ω مجموعة جميع اللجان المؤلفة من أربع أشخاص فيكون عدد الطرق لاختيار لجنة مؤلفة من أربع أشخاص هو:

$$|\Omega| = C_4^{12} = \frac{12!}{4!\cdot 8!} = \frac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2\times1} = \boxed{495}$$ لجنة / طريقة

[ب] عدد الطرق الممكنة لاختيار طالبة هو:

$$C_1^5 = \boxed{5}$$

" " " ثلاث طلاب هو:

$$C_3^7 = \frac{7!}{3!\,4!} = \boxed{35}$$

فيكون عدد الطرق الممكنة لتشكيل لجنة من طالبة وثلاثة طلاب هو (نفرض A الحدث الدال على ذلك) من المبدأ الأساسي في العد

$$|A| = C_1^5 \times C_3^7 = 5\times35 = \boxed{175}$$ طريقة

ومنه

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{175}{495} = \boxed{0.353}$$

[ج] نفرض B الحدث الدال على أن اللجنة مؤلفة من طالبتان وطالبين عندئذ

$$|B| = C_2^5 \times C_2^7 = 10\times21 = \boxed{210}$$ طريقة

ومنه

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{210}{495} = \boxed{0,424}$$

[د] نفرض C الحدث الدال على أن اللجنة تحوي طالبة واحدة على الأقل فيكون لدينا أربع حالات طالبة وثلاثة طلاب أو طالبتان وطالبين أو ثلاث طالبات وطالب أو أربع طالبات.

ومنه :

$$|C| = C_1^5 \times C_3^7 + C_2^5 \times C_2^7 + C_3^5 \times C_1^7 + C_4^5 \times C_0^7$$

$\Rightarrow$

$$|C| = (5\times 35) + (10\times 21) + (10\times 7) + (5\times 1)$$

$$= 175 + 210 + 70 + 5 = \boxed{460}$$

ومنه

$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{460}{495} = \boxed{0,929}$$

طريقة أخرى

بما أن C يدل على وجود طالبة على الأقل نكون C' تدل على عدم وجود أي طالبة، أي وجود أربع طلاب ومنه

$$|C'| = C_0^5 \times C_4^7 = \frac{7!}{4!.3!} = \boxed{35}$$

$$\Rightarrow P(C') = \frac{|C'|}{|\Omega|} = \frac{35}{495} \approx \boxed{0.071}$$

$$\Rightarrow P(C) = 1 - P(C') = 1 - 0,071 \approx \boxed{0.929}$$

هـ) نفرض أن Δ يدل على أن يوجد في اللجنة طالب واحد على الأكثر فنكون لدينا حالتين إما طالب وثلاث طالبات أو أربع طالبات ومنه

$$|\Delta| = C_3^5 \times C_1^7 + C_4^5 \times C_0^7$$

$$= 10\times 7 + 5\times 1 = \boxed{75}$$

$$\Rightarrow P(\Delta) = \frac{|\Delta|}{|\Omega|} = \frac{75}{495} = \boxed{0,151}$$

/ /

ب) نفرض أن E يدل على أن اللجنة من جنس واحد فيكون لدينا حالتين
إما أربع طالبات أو أربعة طلاب ومنه

$$|E| = C_4^5 \times C_0^7 + C_0^5 \times C_4^7$$

$$= 5 \times 1 + 1 \times 35 = \boxed{40}$$

$$\Rightarrow P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{40}{495} = \boxed{0,08}$$

خاصية الفرق التناظري :

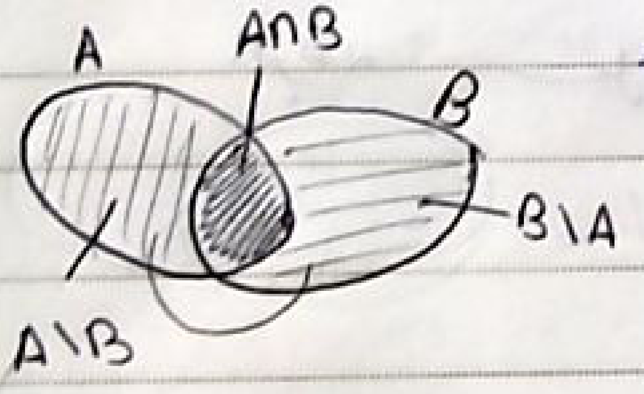
١/ مبرهنة : $P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

البرهان: تعريفاً

مبادئ تعريفية

$$A \Delta B := (A/B) \cup (B/A)$$

نلاحظ أن A/B و B/A متنافيان



$$\Rightarrow P(A \Delta B) = P[(A/B) \cup (B/A)]$$

بسبب التنافي $= P(A/B) + P(B/A)$ (*)

وعليه يمكننا كتابة

$$A/B = A/A \cap B$$

و

$$B/A = B/(A \cap B)$$

$$A/B = A/(A \cap B)$$

ولدينا $A \cap B \subset B$ ، $A \cap B \subset A$

فإن (*) تصبح

$$P(A \Delta B) = P(A/(A \cap B)) + P(B/(A \cap B))$$

حسب خواص الاحتمال $= [P(A) - P(A \cap B)] + [P(B) - P(A \cap B)]$

$$\Rightarrow P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

#.

متباينات احتمالية:

ملاحظة/ ومن أن

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

ومنه

$$P(A_1 \cup A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$$

لأنه طرحنا عدد موجب هو $\boxed{P(A_1 \cap A_2) \geq 0}$

ويمكن تعميم هذه الخاصية بالشكل التالي:

مبرهنة/ إذا كانت $A_1, A_2, \dots$ متتالية محددة من الأحداث من F عندئذٍ فإن

$$\boxed{P\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n\geq 1} P(A_n)}$$

البرهان: نشكل الأحداث التالية

$B_1 = A_1$

$B_2 = A_2 / A_1$

$B_3 = A_3 / (A_1 \cup A_2)$

$\vdots$

$B_n = A_n / \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)$

$\vdots$

عندئذٍ نلاحظ أن الأحداث $\{B_n\}_{n\geq 1}$ متنافية مثنى مثنى وأن $\boxed{B_n \subseteq A_n}$ ، $n \geq 1$

أيضاً: $\bigcup_{n\geq 1} B_n = \bigcup_{n\geq 1} A_n$

وبالتالي

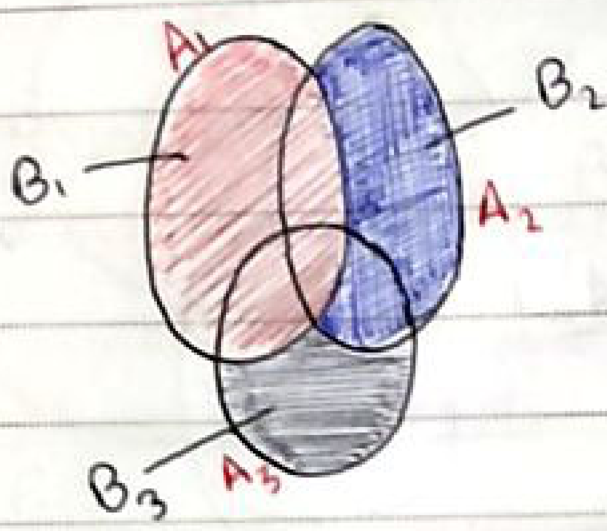
/ /

$$P\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n\geq 1} B_n\right)$$

وبما أن (B_n) متنافية مثنى مثنى فإن

$$P\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n\geq 1} B_n\right) = \sum_{n\geq 1} P(B_n)$$

للتوضيح:



$B_1 = A_1$

$B_2 \subset A_2$

$B_3 \subset A_3$

$\vdots$

$B_1 \cap B_2 = \phi$

$B_1 \cap B_2 \cap B_3 = \phi$

ولكن $B_n \subseteq A_n$ فإن $P(B_n) \leq P(A_n)$ من أجل $n \geq 1$ ومنه

$$P\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n\geq 1} B_n\right) = \sum_{n\geq 1} P(B_n)$$

$$\leq \sum_{n\geq 1} P(A_n)$$

من أجل $n \geq 1$

ومنه نجد أن

$$P\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n\geq 1} P(A_n) \quad \#.$$

أثبت: $P\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) \geq 1 - \sum_{n\geq 1} P(A_n')$

البرهان :

$$P\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) = 1 - P\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right)'$$

$$= 1 - P\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n'\right)$$ دومورغان

ومن المبرهنة السابقة فإن:

$$P\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n'\right) \leq \sum_{n\geq 1} P(A_n')$$

$$\Rightarrow -P\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n'\right) \geq -\sum_{n\geq 1} P(A_n')$$

$$\Rightarrow$$

$$\underbrace{1 - P\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n'\right)}_{=P\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right)} \geq 1 - \sum_{n\geq 1} P(A_n')$$

$$\Rightarrow P\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) \geq 1 - \sum_{n\geq 1} P(A_n') \quad \#$$

/ مبرهنة/ الاطراد المتزايد:

إذا كانت $\{A_n\}_{n\geq 1}$ متتالية من الأحداث من F متزايدة باطراد أي $(A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots)$ وكان $A = \bigcup_{n\geq 1} A_n$ فإن

$$\boxed{P(A) = P\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)}$$

البرهان: بما أن المتتالية متزايدة باطراد فإنه يمكننا أن نكتب

$$A = \bigcup_{n\geq 1} A_n = A_1 \cup (A_2/A_1) \cup (A_3/A_2) \cup \dots \cup (A_n/A_{n-1}) \cup \dots$$

نلاحظ أن الأحداث $\{A_n/A_{n-1}\}_{n\geq 1}$ متنافية مثنى مثنى ومنه

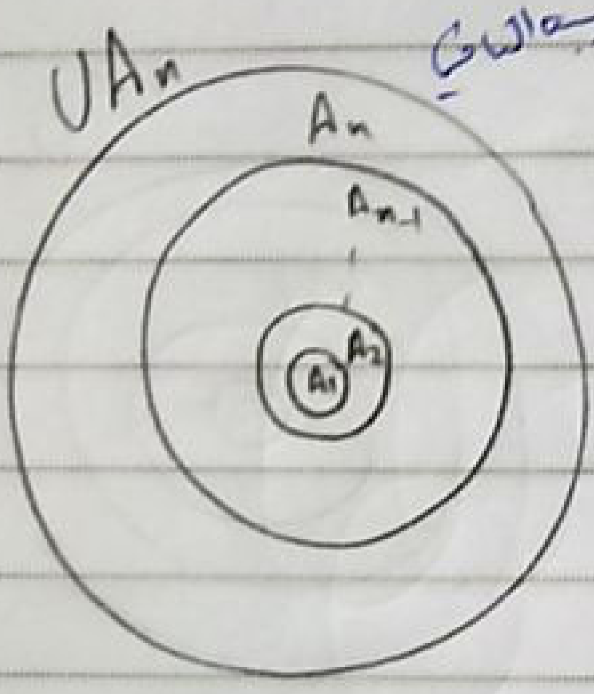
$$P(A) = P\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = P[A_1 \cup (A_2/A_1) \cup \dots \cup (A_n/A_{n-1}) \cup \dots]$$

$$= P(A_1) + P(A_2/A_1) + \dots + P(A_n/A_{n-1}) + \dots$$

$$(*) \longrightarrow \quad = \lim_{n\to\infty} [P(A_1) + P(A_2/A_1) + \dots + P(A_n/A_{n-1})]$$

وبما أن المتتالية متزايدة فإن.

$$A_n = A_1 \cup (A_2 / A_1) \cup \dots \cup (A_n / A_{n-1})$$



بالتالي $\Rightarrow$

$$\underbrace{P(A_n) = P(A_1) + P(A_2 / A_1) + \dots + P(A_n / A_{n-1})}_{\text{نعوض في } (*)}$$

$$\Rightarrow P(A) = P\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n)$$

#A.

#انتهت.