المحاضرة الأولى - تحليل دالي (1)

الأحد 2015 / 10 / 12

البحث الأول: "الفضاءات المترية"

أولاً: نعرف المجموعة X ونعرف عليها المترك حيث

دالة المترك: هي دالة من منطلق والى مستقر وقاعدة ربط ويرمز لها d

$$d: X\times X \longrightarrow \mathbb{R}$$ [ليس ضروري أن نقطع المستقر الفعلي]

$$(x,y) \mapsto d(x,y)$$

وتحقق الخواص التالية..

1. $d(x,y) \geq 0$; دالة حقيقية غير سالبة
2. $d(x,y)=0 \iff x=y$
3. $d(x,y) = d(y,x)$ التناظر
4. $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$: متراجحة المثلث

إذا تحققت هذه الشروط فإن الدالة d تسمى مترك على X

وتسمى الفضاء (X,d) فضاء متري..

إذا حصلنا على فضاء (Y,d) جزئي من (X,d). فإذا أخذنا مجموعة جزئية Y من X وهكذا فإن المترك على Y سيبقى بالمقصور...

X

(X,d) أن كل عناصر Y موجودة في X

* الفضاء المألوف هو الفضاء $\mathbb{R}^n$ والدالة المسافة المعرفة عليه
* الفضاء $\mathbb{R}^n$ فضاء متري مهما تكن n
* غالباً تكون الشروط 1-2-3 سهلة التحقق ولكن الإشكالية تكون في الشرط (4) (متراجحة المثلث)

⊕ أمثلة عن الفضاءات المترية

1- المحور الحقيقي : $\mathbb{R}$

وهو مجموعة الاعداد الحقيقية المزودة بالمترك المعتاد المعرف بالمساواة

$d(x,y)=|x-y|$

التحقق منه بسيط وسهل ...

① $d(x,y)=|x-y|\geq 0$ واضح

② $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y$

③ $d(x,y)=|x-y|=|(-1)(y-x)|$

$=|-1||y-x| = |y-x|$

$=d(y,x)$

④ $|x+z+z-y| \leq |x-z|+|z-y|$

$d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$

2- المستوي الاقليدي : $\mathbb{R}^2$

~~$d(x,y)=\sqrt{\dots}$~~

$x=(\xi_1,\xi_2)$, $y=(\eta_1,\eta_2)$

$\Rightarrow d(x,y)=\sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+(\xi_2-\eta_2)^2}$

هي مترك ايضاً

① $d(x,y)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

② $d(x,y)=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=0$

$\Leftrightarrow (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=0$

$\Leftrightarrow (x_1-x_2)^2=(y_1-y_2)^2$ ...

3- الفضاء الحقيقي الثلاثي البعد $\mathbb{R}^3$

يتألف هذا الفضاء من مجموعة الثلاثيات المرتبة من الاعداد الحقيقية $x=(x_1,x_2,x_3)$, $y=(y_1,y_2,y_3)$ والمزودة بالمترك

$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}$

4- الفضاء ℓ^∞

فضاء المتتاليات المحدودة (عقدية أو حقيقية)

أي أن عناصر ℓ^∞ هي عبارة عن متتاليات محدودة مثل $x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3\dots\xi_i)$

$i=1,2,3,\dots$

$|\xi_i|\leq C_x$: C_x : عدد حقيقي

أي كل عنصر من هذا الفضاء ℓ^∞ هو محدود ولكن ليس بالضرورة أن يكون ℓ^∞ محدود لأنه لا يوجد حد يحد كل عناصر ℓ^∞

نعرف الدالة $d(x,y):=\sup_{i\in\mathbb{N}}|\xi_i-\eta_i|$

هل الدالة هذه موجودة..؟ ولماذا!

نعم موجودة... لأنه لدينا منغلق ℓ^∞

وعنصر $\mathbb{R}$ ولأن ξ_i تحقق الشرط

$|\xi_i|<C_x \quad \forall i=1,2,3\dots$

ولأن η_i تحقق: $|\eta_i|<C_y \quad \forall i=1,2,\dots$

وفرق داليتين محدودتين هو دالة محدودة

أي: $|\xi_i - \eta_i| \leq |\xi_i| + |\eta_i|$

$\leq C_x + C_y = \ell.$

$\Rightarrow |\xi_i - \eta_i| \leq \ell$

أي محدودة فلدينا مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ محدودة من الأعلى ولأن كل مجموعة جزئية محدودة تملك $\sup$ ⇐ الدالة موجودة

– الآن اثبات انه متري

① القيمة المطلقة غير سالبة ⇐ $\sup$ لا غير سالب

② $\sup|\xi_i - \eta_i| = 0$

$\Leftrightarrow |\xi_i - \eta_i| = 0$

$\Leftrightarrow \xi_i = \eta_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$

أي المتتاليتين (الدالتين) منطبقتان على بعضهما

③ واضح

④ $|\xi_i - \eta_i| = |\xi_i - \zeta_i + \zeta_i - \eta_i|$

$|\xi_i - \eta_i| \leq |\xi_i - \zeta_i| + |\zeta_i - \eta_i|$

الآن يجب أن نأخذ $\sup$ للطرفين لكنه يجب التذكرة بهذا أولاً..

$0 \leq a_i \leq b_i \leq \sup B$. ⊛

حيث $a_i \geq 0 \rightarrow A$ و $b_i \geq 0 \rightarrow B$

$\sup B$ أصغر حد أكبر لـ b

و b أكبر من a ⇐ $\sup B$ هي أصغر حد أكبر لـ a ⇐ $\sup A \leq \sup B$

بالاعتماد على الخاصة السابقة نستطيع اعتبار

$\sup|\xi_i - \eta_i| \leq \sup|\xi_i - \zeta_i| + \sup|\zeta_i - \eta_i|$

$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

5 – الفضاء $C[a,b]$

X مجموعة كل الدوال الحقيقية وكل دالة هي معرفة ومستمرة على مجال مغلق $[a,b]$

ونعرف الدالة $d(x,y) = \max\limits_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|$

① هل الدالة السابقة موجودة؟!.. ولماذا!

نعم موجودة لأن $x(t)$ دالة وحيدة القيمة و $y(t)$ دالة وحيدة القيمة وكل منهما مستمر لأنهما من الفضاء $C[a,b]$ مجموعهما مستمر

③ إشارة والقيمة المطلقة دالة مستمرة وتركيب

④ دوال المستمرة هو دالة مستمرة.

وإذا مجموعة متراصة أي الاستقرار يطلع استمرار فتأخذ أي هناك قيمة يبلغ عندها قيمة العظمى أي موجودة.. برهان انه متري في العادي

واضح ①+②+③

④ $|\xi_i - \eta_i| = |\xi_i - \zeta_i + \zeta_i - \eta_i|$

$\leq |\xi_i - \zeta_i| + |\zeta_i - \eta_i|$

بالاعتماد على الخاصة (٢) نكتب بال $\max$ بدلاً من

$\max|\xi_i - \eta_i| \leq \max|\xi_i - \zeta_i| + \max|\xi_i - \zeta_i|$

$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

6- فضاء المتتاليات

يتألف هذا الفضاء من مجموعة كل المتتاليات (سواء كانت محدودة أم غير محدودة)

ونعرف الدالة

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i|}$$

هل الدالة السابقة موجودة؟!... ولماذا!!

نعم موجودة لأن إذا فرضنا a_n

ولدينا $\sum \frac{1}{2^i}=\sum b_n$

هذه متسلسلات ذات حدود ~~موجبة~~

غير سالبة ولدينا $0\le a_n\le b_n$

بما أن b_n متقاربة فإن a_n

متقاربة ولأنها متقاربة فهي ذات مجموع

وهي بالتالي هي موجودة..

أثبت إنه فضاء .. يترك على الطالب!

الحل بفرض $f(t)=\frac{1}{1+t}$

$$\Rightarrow f'(t)=\frac{1}{(1+t)^2}>0$$

أي المتتالية متزايدة $\Leftarrow$

$$\boxed{\begin{aligned}&|a+b|\le|a|+|b|\\&f(|a+b|)\le f(|a|+|b|)\end{aligned}}\quad (*)$$

استناداً إلى (*) ومتباينة المثلث $\Leftarrow$

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\le\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$$

$$\le\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}$$

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\le\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$$

بفرض $a=\xi_i-\zeta_i$

$b=\zeta_i-\eta_i$

$$\Rightarrow \frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i|}\le\frac{|\xi_i-\zeta_i|}{1+|\xi_i-\zeta_i|}+\frac{|\zeta_i-\eta_i|}{1+|\zeta_i-\eta_i|}$$

نضرب طرفي المتباينة بـ $\frac{1}{2^i}>0$

$$\Rightarrow d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$$

وهذا يبين أن الدالة تشكل متراً على X

$\Rightarrow (X,d)$

فضاء متري .. هـ.د

لمن يرغب ببرهان آخر موجود في محاضرات التحليل ٩