2015/10/7

الموضوع: المقاس المحاضرة 1

تذكرة:

« Module »

لنفرض أنه لدينا G مجموعة غير خالية سنعرف عليها قانوني التشكيل الداخلي والخارجي:

"قانون تشكيل داخلي"

$$+ : G \times G \to G$$
$$(g_1, g_2) \to g_1 + g_2$$

"قانون تشكيل خارجي (يساري)"

$$\cdot : R \times G \to G$$
$$(r, g) \to r.g$$

R مجموعة مؤثرات

نأخذ دوماً يساري

★ نظرية المودولات (المقاسات)

تعريف المقاس

التعريف: لتكن M مجموعة غير خالية، مزودة بقانون تشكيل داخلي $(+)$:

$$+ : M \times M \to M$$
$$(x, y) \to x + y$$

ومزودة بقانون تشكيل خارجي (يساري) مجموعة مؤثراته هي حلقة ما A أي:

حلقة واحدية غير صفرية

$$\cdot : A \times M \to M$$
$$(a, m) \to a.m$$

حينها نقول عن البنية $(M, +, \cdot)$ الأمودول على A (A - مودول) إذا تحقق ما يلي:

[1. $(M, +)$ زمرة تبديلية (حياديها 0_M)

[2. تحقق الشروط التالية: مهما $\alpha, \beta \in A$ ، $m_1, m_2, m \in M$

أ] . $1_A \cdot m = m$

ب] . $\alpha \cdot (m_1 + m_2) = \alpha m_1 + \alpha m_2$

جـ] . $(\alpha + \beta) \cdot m = \alpha m + \beta m$

د] . $(\alpha \cdot \beta) \cdot m = \alpha \cdot (\beta \cdot m)$

أمثلة: [1] $(G, +)$ زمرة تبديلية ، يمكن تزويد G بقانون
تشكيل قانون ~~تشكيل~~ خارجي مجموعة مؤثراته $\mathbb{Z}$ كالتالي

$$\cdot : \mathbb{Z} \times G \to G$$

$$(n, g) \to n \cdot g = \begin{cases} g + \dots + g = ng & ; \boxed{n>0} \\ 0 & ; \boxed{n=0} \\ (-g) + (-g) + \dots + (-g) & ; \boxed{n<0} \end{cases}$$

عندها G هي Z- موديول
حيث أي زمرة تبديلية هي موديول على Z
أثبت ذلك (نقوم بإثبات أ - ب - جـ - د)

مثال [2]: لتكن A حلقة عندها A هي موديول على نفسها
(كل الحلقات هي موديول على نفسها)

$+ : A \times A \to A$ "قانون التشكيل الداخلي"

$\cdot : A \times \underset{\text{بدل } M}{A} \to \underset{\text{بدل } M}{A}$ "قانون التشكيل الخارجي"

هنا قانون التشكيل الداخلي هو نفسه قانون التشكيل الخارجي إذا
كانوا على نفس المجموعة
بأخذ نفس القوانين على الحلقة
نقوم بتحقيق الشروط أ - ب - جـ - د رئيسية

مثال 3 : A^n هي A-مودول

وذلك بأخذ

$$+ : A^n \times A^n \longrightarrow A^n$$

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)$$

أثبت أن $(A^n, +)$ زمرة تبديلية

$$\cdot : A \times A^n \longrightarrow A^n$$

$$(\lambda, (x_1, \dots, x_n)) \longrightarrow \lambda \cdot (x_1, \dots x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

$\in A$. أثبت أن $(A^n, +, \cdot)$ مودول على A^n

$1 \cdot m = m$

$1 \cdot (x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)$

32 : 00

مثال 4 : لتكن A حلقة ولنأخذ :

$$C(N, A) = \{ \underset{\text{تطبيق}}{f : N \to A} \}$$

لنعرف :

$$f_1 + f_2 : N \to A$$

قاعدة الربط $x \longmapsto f_1 + f_2(x) = f_1(x) + f_2(x)$

$$f_1 + f_2 \in C(N, A)$$

$$\lambda \in A \quad , f \in C(N, A)$$

$$\lambda . f : N \to A$$

$$x \to (\lambda . f)(x) = \lambda . f(x)$$

$$\lambda f \in C(N, A)$$

وظيفة: إن مجموعة التوابع $C(N, A)$ هي A-مودول