/ /

المحاضرة الرابعة

- حل معادلة فريدهولم التكاملية بطريقة النواة الحالة:

لننظر إلى المتسلسلة التالية:

$$k(x,s) + \lambda k_2(x,s) + \lambda^2 k_3(x,s) + \dots + \lambda^{m-1} k_m(x,s) + \dots \quad (1)$$

وهي متسلسلة لانهائية بـ λ ونرمز لها بالتعريف بـ $R(x,s,\lambda)$ أي

$$R(x,s,\lambda) = \sum_{m=1}^{m=\infty} \lambda^{m-1} k_m(x,s) \quad \dots (2)$$

ولكن نعلم أن كل دالة تحليلية تقبل النشر في متسلسلة قوى شرط أن تكون هذه المتسلسلة متقاربة.

وبالعكس كل متسلسلة قوى متقاربة فإن تقاربها يمثل دالة تحليلية في نطاق ما

ونلاحظ أن هذه المبرهنة هي شرط لازم وكاف، وهي تمثل المرتبة الأولى بالتحليل الرياضي.

فلذلك ما علينا إلا أن نحدد نطاق تقارب المتسلسلة.

ووجدنا سابقاً $\quad k_m(x,s) = \int_a^b k_{m-1}(x,\tau) \cdot k_1(\tau,s)\, d\tau \quad \dots (3)$

نفرض شفارتز على طرفي المعادلة (3):

$$|k_m(x,s)|^2 \leq \int_a^b |k_m(x,\tau)|^2 d\tau \cdot \int_a^b |k_1(\tau,s)|^2 d\tau \quad \dots (4)$$

لتكن $\quad C_0^2 = \sup_{a \leq x \leq b} \int_a^b |k_1(x,s)|^2 d\tau$

وحسب ما وجدناه سابقاً يمكن أن نكتب العلاقة (3) بالشكل

$$|k_m(x,t)|^2 \leq C_{m-1}^2 \cdot C_0^2 \quad \dots (5)$$

Magic Book

وقد برهنا سابقاً أن $C_m^2 \leq C_{m-1}^2 \cdot B^2$

$$C_m^2 \leq C_{m-2}^2 \cdot B^2 \leq C_{m-4}^2 B^4 \leq \dots \leq C_1^2 B^{2m+2}$$

$$\Rightarrow C_{m-1}^2 \cdot B^2 \leq C_1^2 B^{2m-2}$$

$$\Rightarrow C_{m-1}^2 \leq C_1^2 B^{2m-4} \quad \dots (6)$$

وبالتالي نكتب العلاقة (5) بالشكل:

$$|k_m(x,s)|^2 \leq C_1^2 B^{2(m-2)} \cdot C_0^2$$

بالجذر نجد:

$$|k_m(x,s)| \leq C_1 \cdot C_0 \cdot B^{m-2} \quad \dots (7)$$

ونأخذ الحد العام بالقيمة المطلقة للسلسلة (2):

$$|\lambda^{m-1} k_m(x,s)| = |\lambda^{m-1}| \cdot |k_m(x,s)| \leq |\lambda^{m-1}| \cdot C_0 \cdot C_1 \cdot B^{m-2}$$

ولكن $|\lambda^{m-1}| \cdot C_0 \cdot C_1 \cdot B^{m-2} = \frac{C_0 C_1}{B} [|\lambda| B]^{m-1}$

$$\Rightarrow |\lambda^{m-1} k_m(x,s)| \leq \frac{C_0 C_1}{B} [|\lambda| B]^{m-1}$$

نلاحظ أن الطرف الأيمن ما هو إلا سلسلة هندسية حدها الأول $\boxed{1}$ (حد عام)
وأساسها $|\lambda| . B$

تكون هذه السلسلة متقاربة إذا كان $B < \frac{1}{|\lambda|} \Rightarrow |\lambda| < \frac{1}{B}$

أي أن السلسلة الهندسية متقاربة في القرص الدائري الذي مركزه المبدأ ونصف
قطره $\frac{1}{B}$ أي أن نواة الحالة تمثل دالة تحليلية في القرص $R(0, \frac{1}{B})$

ويمكن إيجاد قرص أوسع (بالتمديد التحليلي) إذ أن التمديد التحليلي يمثل حلاً أيضاً

- ايجاد صيغة اخرى :

من ① نضرب الطرفين بـ $k(\tau,x)$

$$\Rightarrow k(\tau,x)\,R(x,s,\lambda)=k(\tau,x)+\lambda k(\tau,x).k_2(x,s)+\dots$$

$$\dots+\lambda^{m-1}k(\tau,x).k_m(x,s)\;\dots \quad (2)$$

نكامل ② بالنسبة لـ x ونضرب بـ λ فنحصل على :

$$\lambda\int_a^b k(\tau,x)\,R(x,s,\lambda)\,dx=\lambda\int_a^b k(\tau,x)\,k(x,s)\,dx+$$

$$+\lambda^2\int_a^b k(\tau,x).k_2(x,s)\,dx+\dots+\lambda^m\int_a^b k(\tau,x)\,k_m(x,s)\,dx$$

$$\Rightarrow \lambda\int_a^b k(\tau,x)\,R(x,s,\lambda)\,dx=\lambda k_2(\tau,s)+\lambda^2 k_3(\tau,s)+$$

$$+\dots+\lambda^m k_{m+1}(\tau,s)+\dots$$

بمقارنة الطرف الايسر مع ① :

$$\lambda\int_a^b k(\tau,x)R(x,s,\lambda)\,dx=R(\tau,s,\lambda)-k(\tau,s)\;\dots \quad (3)$$

$$R(\tau,s,\lambda)=k(\tau,s)+\lambda\int_a^b k(\tau,x)\,R(x,s,\lambda)\,dx\;\dots \quad (4)$$

من نمط معادلة

وهي معادلة أخرى فريدهولم التكاملية وإذا بدلنا كل τ بـ x في 4 نحصل على :

$$R(x,s,\lambda)=k(x,s)+\lambda\int_a^b k(x,\tau)\,R(x,s,\lambda)\,d\tau\;\dots \quad (5)$$

$$\Rightarrow R(x,s,\lambda)=k(x,s)+\lambda\int_a^b k(\tau,s).R(x,\tau,\lambda)\,d\tau\;\dots \quad (6)$$

وبالعودة إلى شكل معادلة فريدهولم التكاملية :

$$g(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,s).g(s)\,ds\;\dots \quad (7)$$

Magic Book

$$\Rightarrow \frac{g(x)-f(x)}{\lambda} = \int_a^b k(x,s)\, g(s)\, ds \quad \dots \quad (8)$$

ولكن من (6) نجد: $k(x,s) = R(x,s,\lambda) - \lambda \int_a^b k(\tau,s) . R(x,\tau,\lambda)\, d\tau$

وبالتالي نجد: $\frac{g(x)-f(x)}{\lambda} = \int_a^b \left[R(x,s,\lambda) - \lambda \int_a^b k(\tau,s) . R(x,\tau,\lambda)\, d\tau \right] g(s)\, ds$

$$\frac{g(x)-f(x)}{\lambda} = \int_a^b R(x,s,\lambda) . g(s)\, ds - \lambda \int_a^b \int_a^b R(x,\tau,\lambda) . \underbrace{k(\tau,s)\, g(s)\, ds}\, d\tau$$

ومن العلاقة التي في الأعلى (8)

$$\frac{g(x)-f(x)}{\lambda} = \int_a^b R(x,s,\lambda) . g(s)\, ds - \lambda \int_a^b R(x,\tau,\lambda) \left[\frac{g(\tau)-f(\tau)}{\lambda} \right] d\tau$$

$$\frac{g(x)-f(x)}{\lambda} = \int_a^b R(x,s,\lambda) . g(s)\, ds - \int_a^b R(x,\tau,\lambda)\, g(\tau) + R(x,\tau,\lambda)\, f(\tau)\, d\tau$$

$$\frac{g(x)-f(x)}{\lambda} = \underbrace{\int_a^b R(x,s,\lambda)\, g(s)\, ds - \int_a^b R(x,\tau,\lambda)\, g(\tau)\, d\tau}_{\text{نبدل كل } s \text{ بـ } \tau} + \int_a^b R(x,\tau,\lambda) . f(\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow \frac{g(x)-f(x)}{\lambda} = \int_a^b R(x,\tau,\lambda) . f(\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow \boxed{g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,\tau,\lambda) . f(\tau)\, d\tau}$$

وهي صيغة الحل لمعادلة فريدهولم التكاملية باستخدام طريقة النواة الحالة.

تمرين: باستخدام طريقة النواة الحالة حل المعادلة التالية:

$$g(x) = \cos 2x + \int_0^{2\pi} \sin x . \cos(s)\, g(s)\, ds$$

الحل:

$$k(x,s) = \sin x \cos(s) = k_1(x,s)$$

نوجد $k_2(x,s)$: $\int_0^{2\pi} k(x,\tau).k_1(\tau,s)\,d\tau = k_2(x,s)$

$$k_2(x,s) = \int_0^{2\pi} (\sin x . \cos\tau)\sin\tau\cos(s)\,d\tau$$

$$= \sin x . \cos(s) . \int_0^{2\pi} \cos\tau . \sin\tau\,d\tau = 0$$

$$\Rightarrow k_2(x,s) = 0 \Rightarrow k_3(x,s) = 0 \Rightarrow \dots\; k_n(x,s) = 0$$

$$\Rightarrow R(x,s,\lambda) = k(x,s) + \lambda \underset{0}{\underbrace{k_2(x,s)}} + \lambda^2 \underset{0}{\underbrace{k_3(x,s)}} + \dots$$

وبالتالي نواة الحالة ع: $\Rightarrow R(x,s,\lambda) = k(x,s) = \cos(s) . \sin x$

ومنه حل المعادلة باستخدام نواة الحالة

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,s,\lambda) . f(s)\,ds$$

$$\Rightarrow g(x) = \cos(2x) + \lambda \int_{a=0}^{b=2\pi} \sin x \cos(s) . \cos(2s)\,ds$$

$$g(x) = \cos(2x) + \lambda \sin x \int_0^{2\pi} \cos(s) . \cos(2s)\,ds$$

$$g(x) = \cos(2x) + \lambda \sin x\,(0) = \cos(2x)$$

ومنه فإن حل المعادلة: $\Rightarrow g(x) = \cos 2x$

ملاحظة: إن نواة الحالة بالمعادلة السابقة $R(x,s,\lambda)$ والتي تساوي $\sin x . \cos(s)$

هي عبارة عن متسلسلة منتهية وبالتالي فهي متقاربة.

انتهت المحاضرة ...