تمارين

١- A ، B ، C ثلاث نقط من جسم صلب يتحرك بحيث تكون مواضع ومتجهات سرع هذه النقط في لحظة t معلومة وهي :

$$A=(0,0,0) \qquad V_A=(2,1,-3)$$
$$B=(1,1,0) \qquad V_B=(0,3,-1)$$
$$C=(1,1,1) \qquad V_C=(-1,2,-1)$$

عين متجهات سرع النقط التالية في اللحظة المذكورة .

$M_1(2,2,0)$, $M_2(1,1,-1)$, $M_3(1,2,0)$, $M_4(1,0,1)$

٢ - بفرض A , B , C ثلاث نقط من جسم صلب احداثيات النقط وسرعها في لحظة t هي :

$$A=(0,0,0) \qquad V_A=(2,1,-3)$$
$$B=(1,1,0) \qquad V_B=(0,3,-1)$$
$$C=(-1,-1,0) \qquad V_C=(1,2,-5)$$

عين سرع النقط :

$M_1(1,1,-1)$, $M_2(1,2,3)$

٣- ليكن لدينا ثلاث نقط A , B , C من مجموعة مادية احداثياتها وسرعها في لحظة t من الزمن هي:

$$A=(0,0,1) \qquad V(A)=(0,1,2)$$
$$B=(1,1,0) \qquad V(B)=(0,0,1)$$
$$C=(1,2,-1) \qquad V(C)=(-1,1,1)$$

هل المجموعة التي اخذت منها هذه النقط متماسكة أم لا ؟ ولماذا؟

٤- صفيحة بشكل مثلث متساوي الساقين OAB رأسها O ثابت . برهن أن قياس مسقط سرعة النقطة A على المستقيم OB يساوي قياس مسقط سرعة النقطة B على OA

تمارين

١ – قرص دائري نصف قطره a يتحرك بحركة انسحابية معادلات حركته تعطى كما يلي: $z_0 = \cos t$, $y_0 = \sin t$, $x_0 = t$

عين مسار نقطة M من محيط القرص وسرعة وتسارع هذه النقطة.

٢– يتحرك جسم صلب S بحركة انسحابية ، معادلات حركة مركز عطالته C هي .

$$z = 0 \quad , \quad y = b\cos kt \quad , \quad x = a\cos(kt - \alpha)$$

نقطة M من الجسم احداثياتها بالنسبة لجملة احداثيات متماسكة مع الجسم مبدؤها في C (مركز عطالته) هي : $\overrightarrow{CM} = (1,0,1)$ والمطلوب:

١– عين مسار النقطة C ومسار النقطة M

٢– غين متجه سرعة النقطة M ومتجه تسارعها

٣– كيف يتغير مسار النقطة C إذا تغيرت α في الفترة $[0\ ,\ 2\pi]$

٣ – تعطى معادلات حركة ثلاث نقط بالشكل التالي

$$z(o_1) = 0 \quad , \quad y(o_1) = \sin t \quad , \quad x(o_1) = \cos t$$
$$z(o_2) = 2 \quad , \quad y(o_2) = \sin(\pi - t) \quad , \quad x(o_2) = \cos t - 2$$
$$z(o_3) = 1 \quad , \quad y(o_3) = 2\sin t \quad , \quad x(o_3) = -2$$

والمطلوب :

١– عين متجهات السرعة لكل من النقط الثلاث o_1 , o_2 , o_3

٢– هـل تنتمـي النقطـتان o_1 , o_2 إلى جملة متماسكة ؟ وهل تتحرك هذه الجملة بحركة انسحابية ؟

٣– أعد السؤال السابق من أجل النقطتين o_2 , o_3

٤– هل تؤلف النقط الثلاث مجموعة متماسكة ؟

٤– علمت مواضع وسرع النقط التالية:

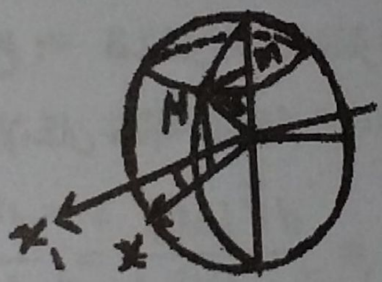
$$A(0,0,0) \quad B(1,1,0) \quad C(1,0,1) \quad D(1,1,1)$$
$$\overrightarrow{V_A}(2,1,-3) \quad \overrightarrow{V_B}(0,3,-1) \quad \overrightarrow{V_C}(0,0,1) \quad \overrightarrow{V_D}(-1,2,-1)$$

أيٌّ من هذه النقط تؤلف مجموعة متماسكة

١-٣-٧ مثال : لنعين حركة نقطة من سطح الكرة الأرضية آخذين بعين الإعتبار حركة الأرض حول محورها فقط .

الحل : إن الحركة دورانية حول محور ثابت ، بفرض M نقطة ما من سطح الكرة فإن مسار النقطة M هي دائرة عرض ، مركزها يقع على محور الدوران نصف قطرها $r = mM$. إن متجه سرعة M يحمل على مماس الدائرة ويتجه باتجاه دوران الكرة الأرضية وهو دوران مباشر . والقيمة العددية للسرعة هي : $v = r\,\omega$ حيث :

$\omega = \dfrac{2\pi}{24 \times 3600}$ (راديان / ثانية) . أما تسارع النقطة M فهو ناظمي لأن الحركة منتظمة ويحمل على $\overrightarrow{Mm}$ ويساوي $\vec{\Gamma}(M) = -\omega^2\,\overrightarrow{mM}$



الشكل (٤)

لتعيين الموضع والسرعة تحليلياً نختار جملة محاور ثابتة ينطبق فيها oz_1 على محور الأرض ونختار جملة محاور متماسكة مع الكرة الأرضية بحيث ينطبق oz على محور

الأرض أيضـــاً . ونخـــتار المحـــور ox في مستوي دائرة الطول المارة من النقطة M .
ونفرض الزاوية بين ox و $\theta : ox_1$

١) مـــن الواضح أن إحداثيات النقطة M بالنسبة لجملة المحاور $o\,x\,y\,z$ المتماسكة مع الأرض هي :

$$z = R\,\sin\alpha \qquad y = 0 \qquad x = R\cos\alpha$$

بفـــرض R نصـــف قطـــر الأرض ، α زاوية عرض مكان M أي الزاوية بين $\overrightarrow{oM}$ و $\overrightarrow{ox}$.

إن معادلة الحركة في هذه الحالة تتعين من العلاقة :

$$\theta' = \omega \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \int \omega\, dt \qquad \theta = \omega t$$

وذلك بإختيار مبدأ للزمن هو اللحظة التي كان فيها ox منطبقاً على ox_1 .

ويتعين موضع النقطة M بالنسبة لجملة الإحداثيات $ox_1\,y_1\,z_1$ التي افترضناها ثابتة من إسقاط العلاقة $\overrightarrow{oM} = x\,\vec{i} + (0)\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ على المحاور $ox_1\,y_1\,z_1$ الأمر الذي يعطي :

$$\begin{aligned} x_1 &= (R\,\cos\alpha\,)\,\cos\theta = (\,R\cos\,\alpha)\,\cos\omega t \\ y_1 &= (R\,\cos\alpha\,)\,\sin\theta = (\,R\cos\,\alpha)\,\sin\omega t \qquad (١) \\ z_1 &= R\sin\alpha = \text{ثابت} \end{aligned}$$

إن المعادلات (١) تمثل معادلات حركة النقطة M وبحذف الزمن بين هذه المعادلات نجد :

$$x_1^2 + y_1^2 = R^2\cos^2\alpha = r^2$$

$$z_1 = R\sin\alpha$$

وهي معادلات دائرة تقع في المستوي الذي يوازي $ox_1\,y_1$ ويبعد عنه بالمقدار $R\sin\alpha$ ومركزها يقع على oz_1 و نصف قطرها $r = R\cos\alpha = M\,m$

٢) السرعة : تتعين سرعة النقطة M من اسقاط العلاقة :

$$\vec{V}(M) = \vec{\omega}\times\overrightarrow{oM}$$

على المحاور المتماسكة مع الأرض الأمر الذي يعطي

$$\vec{V}(M) = (\,0\,,0\,,\omega\,)\times(\,R\cos\alpha\,,\,0\,,R\sin\alpha\,) = \omega\,r\,\vec{j} \qquad (٢)$$

أما الإسقاط على المحاور الثابتة فيعطي :

$$\vec{V}(M) = (\,0\,,0\,,\omega\,)\times(\,r\cos\omega t\,,\,r\sin\omega\,t,\,R\sin\alpha\,)$$

وتتعين سرعة M من (٤– ٦) بالشكل :

$$\vec{V}(M) = -4\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + 6\,\vec{k}$$

ويتعين تسارع M من (٤ –٨) بالشكل :

$$\vec{\Gamma}(M) = -\,8\,\vec{i} - 8\,\vec{j}$$

٣ - تعيين التسارعات :

تتعيـــن مركبات متجه التسارع على جملة الاحداثيات الثابتة باشتقاق مركبات متجه السرعة على هذه المحاور فنكتب :

$$\vec{\Gamma}(M)=x_1''\,\vec{i_1}+y_1''\,\vec{j_1}+z_1''\,\vec{k_1}$$

أو من اسقاط عبارة التسارع (٤-٣) على المحاور الثابتة الأمر الذي يعطي :

$$\vec{\Gamma}(M)=(-\theta''\,y_1-\theta'^2\,x_1)\,\vec{i_1}+(\theta''\,x_1-\theta'^2\,y_1)\,\vec{j_1}+b\theta''\,\vec{k_1} \qquad (٤-٧)$$

ونحصــل على مركبات التسارع على جملة المحاور المتماسكة باسقاط العبارة (٤-٣) على هذه المحاور فنجد :

$$\vec{\Gamma}(M)=(-\theta''\,y-\theta'^2\,x)\,\vec{i}+(\theta''\,x-\theta'^2\,y)\,\vec{j}+b\theta''\,\vec{k} \qquad (٤-٨)$$

١ - ٤ - ٦ مثال: تدور اسطوانة دائرية حول محورها بسرعة زاوية ثابتة $\omega=2$ وينسحب محورها على حامله بسرعة منتظمة قيمتها $v=6$ والمطلوب تعيين الخطـــوة المختزلة للحركة اللولبية للاسطوانة ثم تعيين موضع ومسار وسرعة وتسارع نقطة من الاسطوانة . احداثياتها بالنسبة لمحاور متماسكة مع الاسطوانة هي (3 , 2 , 2) .

الحل : نعلم من خواص اللولب الدائري أن $S=b\,\theta$

أي $v=s'=b\,\omega \Leftarrow 6=2\,b$

ومنه فإن خطوة اللولب المختزلة $b=3$.

ومعادلة حركة الاسطوانة : $\theta=\int\omega\,dt=2t$

بفرض أن $\theta=0$ في لحظة البدء

إن موضع النقطة M يتعين من (٤- ٤) . التي تعطي في هذه الحالة :

$$x_1=2(\cos 2t-\sin 2t)$$

$$y_1=2(\sin 2t+\cos 2t)$$

$$z_1=3+6t$$

وهي معادلات حركة النقطة M . وبحذف t بين هذه المعادلات الثلاث نجد :

(١) $x_1^2+y_1^2=8$ وهي معادلة سطح لاسطوانة نصف قطرها $2\sqrt{2}$ محورها $o_1\,z_1$

(٢) $$x_1=2\left(\cos\frac{z_1-3}{3}-\sin\frac{z_1-3}{3}\right)$$

إن (١) و (٢) همــا معادلـــتا مســـار النقطة M وهو منحن لولبي يرتسم على سطح الاسطوانة بيان المعادلة (١) .

$$= -\omega\, r \sin \omega\, t\, \overrightarrow{i_1} + \omega\, r\, \cos\omega\, t\, \overrightarrow{j_1} \qquad (٣)$$

٣) التسارع : نحصل على مركبات متجه التسارع من إسقاط العلاقة :

$$\overrightarrow{\Gamma}(M) = -\omega^2\, \overrightarrow{m\, M}$$

على المحاور المتماسكة مع الأرض الأمر الذي يعطي :

$$\overrightarrow{\Gamma}(M) = -\,\omega^2\, (\,x\,,0\,,0\,) = -\,\omega^2 R\, \cos\alpha\, \overrightarrow{i} \qquad (٤)$$

والاسقاط على المحاور الثابتة يعطي :

$$\overrightarrow{\Gamma}(M) = -\,\omega^2\, (\,x_1\,,y_1\,,0\,) = -\,\omega^2 r\, \cos\omega t\, \overrightarrow{i_1} - \omega^2 r\, \sin\omega\, t\, \overrightarrow{j_1} \qquad (٥)$$

تمارين

١- يتحرك جسم صلب بحركة دورانية حول محور ثابت Δ حسب المعادلة :

$$\varphi = \alpha \log \left(1 + \frac{\omega_0 t}{\alpha} \right)$$

($\omega_0 \ , \alpha$ ثابتتان)

والمطلوب ١) تعيين متجه الدوران ومتجه التسارع الزاوي للجسم

٢) تعيين سرعة وتسارع نقطة من الجسم تبعد عن محور الدوران بالمقدار R

٣) تعيين قيمة كل من التسارع المماسي والتسارع الناظمي والتسارع الكلي

٤) تعيين القيمة العددية للسرعة و التسارع عندما تسعى t إلى اللانهاية .

٢- تتحرك أسطوانة دائرية حول محورها وفق المعادلة :

$$\theta = a \left[t + \frac{1}{b} \left(e^{-bt} - 1 \right) \right]$$

($a \ , b$ ثابتتان موجبتان)

والمطلوب ١) عين متجه الدوران ومتجه التسارع الزاوي للاسطوانة

٢) عين سرعة وتسارع نقطة منُ قاعدة الاسطوانة تبعد عن مركز القاعدة بالمقدار $r = \frac{R}{2}$ حيث R نصف قطر قاعدة الاسطوانة

٣) عين سرعة وتسارع نقطة من سطح الاسطوانة تبعد عن قاعدتها بالمقدار R

٤) ناقش قيم السرع والتسارعات عندما يسعى t إلى اللانهاية

٣- يدور قرص دائري نصف قطره R ، حول قطره الثابت oA بسرعة زاوية $\omega = 2\, e^{-t}$ والمطلوب :

١) أوجد معادلة حركة القرص

٢) عين السرعة والتسارع لنقطة من محيط القرص تقع على القطر الذي يصنع زاوية $\frac{\pi}{3}$ مع القطر oA بالطريقة الشعاعية ثم بالطريقة التحليلية بالنسبة لمحاور متماسكة مع القرص وبالنسبة لمحاور ثابتة .

٤- أعد حل المسألة (١) بفرض أن الحركة لولبية خطوتها $b = \alpha$

٥- يتحرك قرص دائري نصف قطره a بحركة لولبية حول محوره بسرعة زاوية ثابتة

$\omega = \omega_o$ علماً أن محور القرص ينتقل بمقدار $2\omega_o$ عندما يتم القرص دورة كاملة حول محوره والمطلوب :

١ – تعيين مسار وسرعة وتسارع نقطة M من محيط القرص

٢– تعيين مسار وسرعة وتسارع نقطة تبعد عن مركز القرص بالمقدار $\frac{1}{2}a$